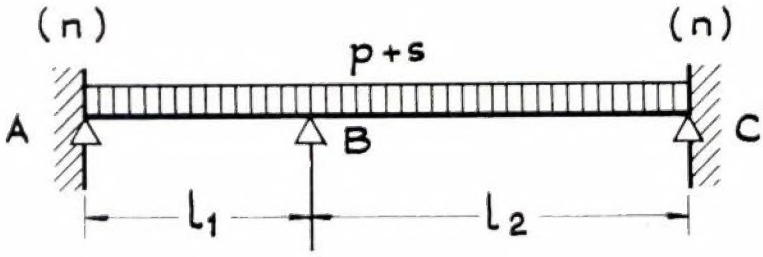
TABELA 6 — Viga continua de dois tramos, parcialmente encastrada nos apoios extremos, com cargas uniformemente distribuidas




| $l_2/l_1$ | n = 0 | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k_A$ | $k_B$ | $k_C$ | $k'_A$ | $k'_B$ | $k'_C$ | $k''_A$ | $k''_B$ | $k''_C$ |
| | $-pl_1^2$ | | | $-sl_1^2$ | | $+sl_1^2$ | | $-sl_1^2$ | |
| 1,0 | 0,0000 | 0,1250 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0625 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0625 | 0,0000 |
| 1,1 | 0,0000 | 0,1388 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0595 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0792 | 0,0000 |
| 1,2 | 0,0000 | 0,1550 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0568 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0982 | 0,0000 |
| 1,3 | 0,0000 | 0,1738 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0543 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1194 | 0,0000 |
| 1,4 | 0,0000 | 0,1950 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0521 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1429 | 0,0000 |
| 1,5 | 0,0000 | 0,2188 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0500 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1688 | 0,0000 |
| 1,6 | 0,0000 | 0,2450 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0481 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1969 | 0,0000 |
| 1,7 | 0,0000 | 0,2738 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0463 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2275 | 0,0000 |
| 1,8 | 0,0000 | 0,3050 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0446 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2604 | 0,0000 |
| 1,9 | 0,0000 | 0,3380 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0431 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2956 | 0,0000 |
| 2,0 | 0,0000 | 0,3750 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0417 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0333 | 0,0000 |
| 2,25 | 0,0000 | 0,4766 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0385 | 0,0000 | 0,0000 | 0,4381 | 0,0000 |
| 2,5 | 0,0000 | 0,5938 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0357 | 0,0000 | 0,0000 | 0,5580 | 0,0000 |

TABELA 6 — Viga continua de dois tramos (cont.)

| $l_2/l_1$ | n = 1/4 | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k_A$ | $k_B$ | $k_C$ | $k'_A$ | $k'_B$ | $k'_C$ | $k''_A$ | $k''_A$ | $k''_C$ |
| | $-pl_1^2$ | | | $-sl_1^2$ | | $+sl_1^2$ | | $-sl_1^2$ | |
| 1,0 | 0,0208 | 0,1146 | 0,0208 | 0,0296 | 0,0573 | 0,0088 | 0,0088 | 0,0573 | 0,0296 |
| 1,1 | 0,0189 | 0,1272 | 0,0270 | 0,0301 | 0,0546 | 0,0084 | 0,0112 | 0,0726 | 0,0354 |
| 1,2 | 0,0166 | 0,1421 | 0,0335 | 0,0304 | 0,0521 | 0,0080 | 0,0138 | 0,0900 | 0,0415 |
| 1,3 | 0,0140 | 0,1593 | 0,0405 | 0,0308 | 0,0498 | 0,0077 | 0,0168 | 0,1095 | 0,0482 |
| 1,4 | 0,0110 | 0,1787 | 0,0479 | 0,0311 | 0,0477 | 0,0073 | 0,0202 | 0,1310 | 0,0552 |
| 1,5 | 0,0076 | 0,2005 | 0,0557 | 0,0314 | 0,0458 | 0,0071 | 0,0238 | 0,1547 | 0,0627 |
| 1,6 | 0,0039 | 0,2246 | 0,0639 | 0,0317 | 0,0441 | 0,0068 | 0,0278 | 0,1805 | 0,0707 |
| 1,7 | — 0,0001 | 0,2509 | 0,0725 | 0,0319 | 0,0424 | 0,0065 | 0,0321 | 0,2085 | 0,0791 |
| 1,8 | — 0,0046 | 0,2796 | 0,0816 | 0,0322 | 0,0409 | 0,0063 | 0,0367 | 0,2387 | 0,0879 |
| 1,9 | — 0,0093 | 0,3105 | 0,0911 | 0,0324 | 0,0395 | 0,0061 | 0,0417 | 0,2710 | 0,0972 |
| 2,0 | — 0,0144 | 0,3437 | 0,1010 | 0,0326 | 0,0382 | 0,0059 | 0,0470 | 0,3056 | 0,1068 |
| 2,25 | — 0,0287 | 0,4368 | 0,1275 | 0,0330 | 0,0353 | 0,0054 | 0,0618 | 0,4016 | 0,1329 |
| 2,5 | — 0,0465 | 0,5443 | 0,1567 | 0,0334 | 0,0327 | 0,0050 | 0,0787 | 0,5115 | 0,1617 |

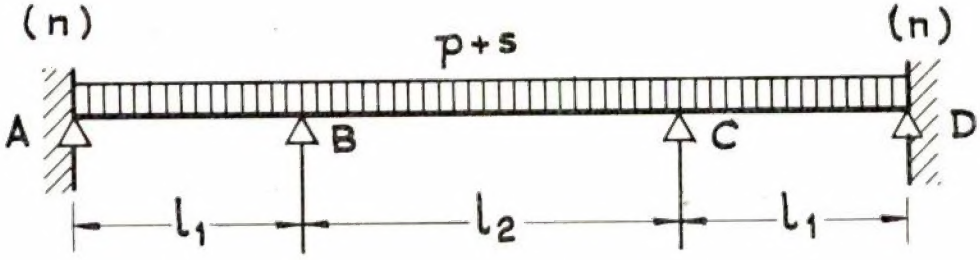
| $l_2/l_1$ | n = 1/2 | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k_A$ | $k_B$ | $k_C$ | $k'_A$ | $k'_B$ | $k'_C$ | $k''_A$ | $k''_B$ | $k''_C$ |
| | $-pl_1^2$ | | | $-sl_1^2$ | | $+sl_1^2$ | | $-sl_1^2$ | |
| 1,0 | 0,0417 | 0,1042 | 0,0417 | 0,0565 | 0,0521 | 0,0149 | 0,0149 | 0,0521 | 0,0565 |
| 1,1 | 0,0384 | 0,1156 | 0,0534 | 0,0573 | 0,0496 | 0,0142 | 0,0189 | 0,0660 | 0,0676 |
| 1,2 | 0,0345 | 0,1292 | 0,0660 | 0,0579 | 0,0473 | 0,0135 | 0,0234 | 0,0818 | 0,0795 |
| 1,3 | 0,0301 | 0,1448 | 0,0793 | 0,0585 | 0,0453 | 0,0129 | 0,0284 | 0,0995 | 0,0923 |
| 1,4 | 0,0250 | 0,1625 | 0,0936 | 0,0590 | 0,0434 | 0,0124 | 0,0340 | 0,1191 | 0,1060 |
| 1,5 | 0,0193 | 0,1823 | 0,1086 | 0,0595 | 0,0417 | 0,0119 | 0,0402 | 0,1406 | 0,1205 |
| 1,6 | 0,0131 | 0,2042 | 0,1245 | 0,0600 | 0,0401 | 0,0114 | 0,0469 | 0,1641 | 0,1360 |
| 1,7 | 0,0063 | 0,2281 | 0,1412 | 0,0604 | 0,0386 | 0,0110 | 0,0542 | 0,1895 | 0,1523 |
| 1,8 | — 0,0012 | 0,2542 | 0,1588 | 0,0608 | 0,0372 | 0,0106 | 0,0620 | 0,2170 | 0,1694 |
| 1,9 | — 0,0092 | 0,2823 | 0,1772 | 0,0612 | 0,0359 | 0,0103 | 0,0704 | 0,2464 | 0,1875 |
| 2,0 | — 0,0179 | 0,3125 | 0,1964 | 0,0615 | 0,0347 | 0,0099 | 0,0794 | 0,2778 | 0,2063 |
| 2,25 | — 0,0420 | 0,3971 | 0,2481 | 0,0623 | 0,0321 | 0,0092 | 0,1043 | 0,3651 | 0,2573 |
| 2,5 | — 0,0699 | 0,4948 | 0,3051 | 0,3136 | 0,0298 | 0,0085 | 0,1329 | 0,4650 | 0,0629 |

TABELA 6 — Viga contínua de dois tramos (cont.)

| $l_2/l_1$ | n = 3/4 | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k_A$ | $k_B$ | $k_C$ | $k'_A$ | $k'_B$ | $k'_C$ | $k''_A$ | $k''_B$ | $k''_C$ |
| | $-pl_1^2$ | | | $-sl_1^2$ | | $+sl_1^2$ | | $-sl_1^2$ | |
| 1,0 | 0,0625 | 0,0938 | 0,0625 | 0,0813 | 0,0469 | 0,0188 | 0,0188 | 0,0469 | 0,0813 |
| 1,1 | 0,0584 | 0,1041 | 0,0794 | 0,0821 | 0,0446 | 0,0179 | 0,0238 | 0,0594 | 0,0972 |
| 1,2 | 0,0535 | 0,1163 | 0,0975 | 0,0830 | 0,0426 | 0,0170 | 0,0295 | 0,0736 | 0,1145 |
| 1,3 | 0,0479 | 0,1303 | 0,1169 | 0,0837 | 0,0408 | 0,0163 | 0,0358 | 0,0896 | 0,1332 |
| 1,4 | 0,0415 | 0,1463 | 0,1375 | 0,0844 | 0,0391 | 0,0156 | 0,0429 | 0,1072 | 0,1531 |
| 1,5 | 0,0344 | 0,1641 | 0,1594 | 0,0850 | 0,0375 | 0,0150 | 0,0506 | 0,1266 | 0,1744 |
| 1,6 | 0,0265 | 0,1838 | 0,1825 | 0,0856 | 0,0361 | 0,0144 | 0,0591 | 0,1477 | 0,1969 |
| 1,7 | 0,0179 | 0,2053 | 0,2069 | 0,0861 | 0,0347 | 0,0139 | 0,0682 | 0,1706 | 0,2208 |
| 1,8 | 0,0085 | 0,2288 | 0,2325 | 0,0866 | 0,0335 | 0,0134 | 0,0781 | 0,1953 | 0,2459 |
| 1,9 | — 0,0016 | 0,2541 | 0,2594 | 0,0871 | 0,0323 | 0,0129 | 0,0887 | 0,2217 | 0,2723 |
| 2,0 | — 0,0125 | 0,2813 | 0,2875 | 0,0875 | 0,0312 | 0,0125 | 0,1000 | 0,2500 | 0,3000 |
| 2,25 | — 0,0430 | 0,3574 | 0,3633 | 0,0885 | 0,0288 | 0,0115 | 0,1314 | 0,3286 | 0,3748 |
| 2,5 | — 0,0781 | 0,4453 | 0,4409 | 0,0893 | 0,0268 | 0,0107 | 0,1674 | 0,4185 | 0,4576 |

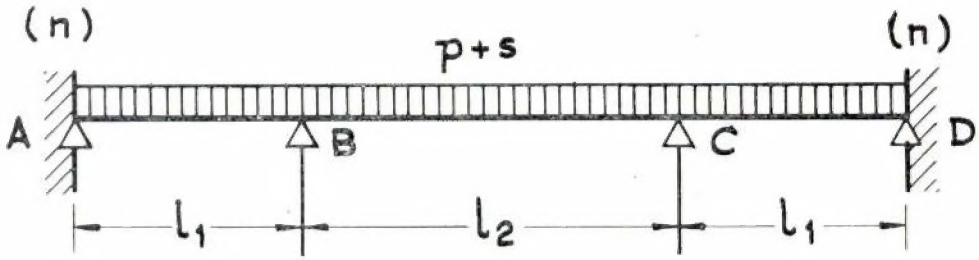
| $l_2/l_1$ | n = 1 | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k_A$ | $k_B$ | $k_C$ | $k'_A$ | $k'_B$ | $k'_C$ | $k''_A$ | $k''_B$ | $k''_C$ |
| | $-pl_1^2$ | | | $-sl_1^2$ | | $+sl_1^2$ | | $-sl_1^2$ | |
| 1,0 | 0,0833 | 0,0833 | 0,0833 | 0,1042 | 0,0417 | 0,0208 | 0,0208 | 0,0417 | 0,1042 |
| 1,1 | 0,0787 | 0,0925 | 0,1050 | 0,1052 | 0,0397 | 0,0198 | 0,0264 | 0,0528 | 0,1248 |
| 1,2 | 0,0733 | 0,1033 | 0,1283 | 0,1061 | 0,0379 | 0,0189 | 0,0327 | 0,0655 | 0,1473 |
| 1,3 | 0,0671 | 0,1158 | 0,1533 | 0,1069 | 0,0362 | 0,0181 | 0,0398 | 0,0796 | 0,1714 |
| 1,4 | 0,0600 | 0,1300 | 0,1800 | 0,1076 | 0,0347 | 0,0174 | 0,0476 | 0,0953 | 0,1974 |
| 1,5 | 0,0521 | 0,1458 | 0,2083 | 0,1083 | 0,0333 | 0,0167 | 0,0562 | 0,1125 | 0,2250 |
| 1,6 | 0,0433 | 0,1633 | 0,2383 | 0,1090 | 0,0321 | 0,0160 | 0,0656 | 0,1313 | 0,2544 |
| 1,7 | 0,0337 | 0,1825 | 0,2700 | 0,1096 | 0,0309 | 0,0154 | 0,0758 | 0,1516 | 0,2854 |
| 1,8 | 0,0233 | 0,2033 | 0,3033 | 0,1101 | 0,0298 | 0,0149 | 0,0868 | 0,1736 | 0,3182 |
| 1,9 | 0,0121 | 0,2258 | 0,3383 | 0,1106 | 0,0287 | 0,0144 | 0,0985 | 0,1971 | 0,3527 |
| 2,0 | 0,0000 | 0,02500 | 0,3750 | 0,1111 | 0,0278 | 0,0139 | 0,1111 | 0,2222 | 0,3889 |
| 2,25 | — 0,0339 | 0,3177 | 0,4740 | 0,1122 | 0,0256 | 0,0128 | 0,1460 | 0,2921 | 0,4868 |
| 2,5 | — 0,0729 | 0,3958 | 0,5833 | 0,1131 | 0,0238 | 0,0119 | 0,1860 | 0,3721 | 0,5952 |

TABELA 7 — Viga continua de três tramos parcialmente encastrada nos apoios extremos, com cargas uniformemente distribuidas



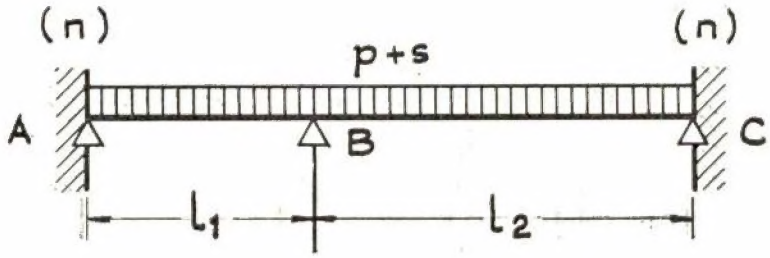

| $l_2/l_1$ | $r_1 = 0$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k_A = k_D$ | $k_B = k_C$ | $k'_A = k'''_D$ | $k'_B = k'''_C$ | $k'_C = k'''_B$ | $k'_D = k'''_A$ | $k''_A = k''_D$ | $k''_B = k''_C$ |
| | $-pl_1^2$ | | $-sl_1^2$ | | $sl_1^2$ | $-sl_1^2$ | $sl_1^2$ | $-sl_1^2$ |
| 0,4 | 0,0000 | 0,0831 | 0,0000 | 0,0911 | 0,0130 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0050 |
| 0,5 | 0,0000 | 0,0804 | 0,0000 | 0,0857 | 0,0143 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0089 |
| 0,6 | 0,0000 | 0,0800 | 0,0000 | 0,0810 | 0,0152 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0142 |
| 0,7 | 0,0000 | 0,0819 | 0,0000 | 0,0768 | 0,0158 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0209 |
| 0,8 | 0,0000 | 0,0859 | 0,0000 | 0,0731 | 0,0162 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0291 |
| 0,9 | 0,0000 | 0,0920 | 0,0000 | 0,0697 | 0,0165 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0388 |
| 1,0 | 0,0000 | 0,1000 | 0,0000 | 0,0667 | 0,0167 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0500 |
| 1,1 | 0,0000 | 0,1100 | 0,0000 | 0,0639 | 0,0167 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0628 |
| 1,2 | 0,0000 | 0,1218 | 0,0000 | 0,0614 | 0,0167 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0771 |
| 1,25 | 0,0000 | 0,1284 | 0,0000 | 0,0602 | 0,0167 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0849 |
| 1,3 | 0,0000 | 0,1355 | 0,0000 | 0,0591 | 0,0167 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0931 |
| 1,4 | 0,0000 | 0,1510 | 0,0000 | 0,0569 | 0,0166 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1106 |
| 1,5 | 0,0000 | 0,1683 | 0,0000 | 0,0549 | 0,0165 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1298 |
| 1,6 | 0,0000 | 0,1874 | 0,0000 | 0,0531 | 0,0163 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1506 |
| 1,7 | 0,0000 | 0,2082 | 0,0000 | 0,0514 | 0,0162 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1730 |
| 1,8 | 0,0000 | 0,2308 | 0,0000 | 0,0498 | 0,0160 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1970 |
| 1,9 | 0,0000 | 0,2552 | 0,0000 | 0,0483 | 0,0158 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2227 |
| 2,0 | 0,0000 | 0,2812 | 0,0000 | 0,0469 | 0,0156 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2500 |
| 2,25 | 0,0000 | 0,3540 | 0,0000 | 0,0437 | 0,0151 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3254 |
| 2,5 | 0,0000 | 0,4375 | 0,0000 | 0,0409 | 0,0146 | 0,0000 | 0,0000 | 0,4112 |
| 3,0 | 0,0000 | 0,6364 | 0,0000 | 0,0364 | 0,0136 | 0,0000 | 0,0000 | 0,6136 |

TABELA 7 — Viga continua de três tramos (cont.)



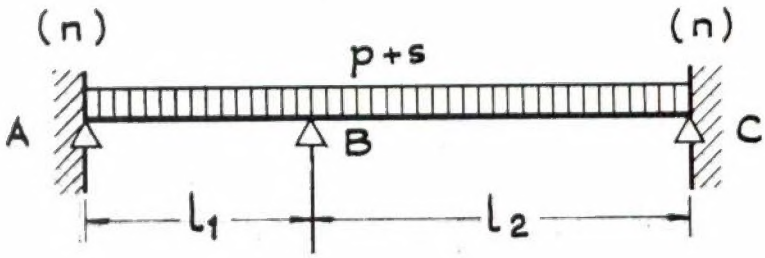

| $l_2/l_1$ | n = 1/4 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k_A = k_D$ | $k_B = k_C$ | $k'_A = k'''_D$ | $k''_B = k'''_C$ | $k'_C = k'''_B$ | $k_D = k'''_A$ | $k''_A = k''_D$ | $k''_B = k''_C$ |
| | $-pl_1^2$ | | $-sl_1^2$ | | $sl_1^2$ | $-sl_1^2$ | $sl_1^2$ | $-sl_1^2$ |
| 0,4 | 0,0270 | 0,0747 | 0,0259 | 0,0818 | 0,0124 | 0,0019 | 0,0008 | 0,0053 |
| 0,5 | 0,0273 | 0,0726 | 0,0267 | 0,0767 | 0,0135 | 0,0021 | 0,0014 | 0,0093 |
| 0,6 | 0,0273 | 0,0728 | 0,0273 | 0,0722 | 0,0142 | 0,0022 | 0,0023 | 0,0148 |
| 0,7 | 0,0269 | 0,0753 | 0,0279 | 0,0683 | 0,0147 | 0,0023 | 0,0033 | 0,0217 |
| 0,8 | 0,0262 | 0,0800 | 0,0285 | 0,0649 | 0,0151 | 0,0023 | 0,0046 | 0,0301 |
| 0,9 | 0,0251 | 0,0866 | 0,0290 | 0,0618 | 0,0152 | 0,0023 | 0,0062 | 0,0401 |
| 1,0 | 0,0238 | 0,0952 | 0,0294 | 0,0590 | 0,0153 | 0,0024 | 0,0079 | 0,0516 |
| 1,1 | 0,0222 | 0,1058 | 0,0298 | 0,0565 | 0,0153 | 0,0024 | 0,0099 | 0,0647 |
| 1,2 | 0,0203 | 0,1182 | 0,0301 | 0,0541 | 0,0153 | 0,0024 | 0,0122 | 0,0793 |
| 1,25 | 0,0192 | 0,1251 | 0,0303 | 0,0531 | 0,0153 | 0,0023 | 0,0134 | 0,0873 |
| 1,3 | 0,0181 | 0,1324 | 0,0305 | 0,0520 | 0,0152 | 0,0023 | 0,0147 | 0,0956 |
| 1,4 | 0,0156 | 0,1484 | 0,0308 | 0,0501 | 0,0151 | 0,0023 | 0,0175 | 0,1135 |
| 1,5 | 0,0129 | 0,1663 | 0,0310 | 0,0483 | 0,0149 | 0,0023 | 0,0205 | 0,1330 |
| 1,6 | 0,0099 | 0,1859 | 0,0313 | 0,0466 | 0,0148 | 0,0023 | 0,0237 | 0,1541 |
| 1,7 | 0,0066 | 0,2073 | 0,0315 | 0,0451 | 0,0146 | 0,0022 | 0,0272 | 0,1768 |
| 1,8 | 0,0030 | 0,2304 | 0,0318 | 0,0436 | 0,0144 | 0,0022 | 0,0310 | 0,2012 |
| 1,9 | —0,0008 | 0,2553 | 0,0320 | 0,0423 | 0,0142 | 0,0022 | 0,0350 | 0,2272 |
| 2,0 | —0,0049 | 0,2819 | 0,0322 | 0,0410 | 0,0140 | 0,0022 | 0,0392 | 0,2549 |
| 2,25 | —0,0163 | 0,3559 | 0,0326 | 0,0381 | 0,0135 | 0,0021 | 0,0510 | 0,3313 |
| 2,5 | —0,0293 | 0,4406 | 0,0330 | 0,0356 | 0,0130 | 0,0020 | 0,0643 | 0,4180 |
| 3,0 | —0,0603 | 0,6418 | 0,0336 | 0,0316 | 0,0121 | 0,0019 | 0,0957 | 0,6223 |

TABELA 7 — Viga continua de três tramos (cont.)



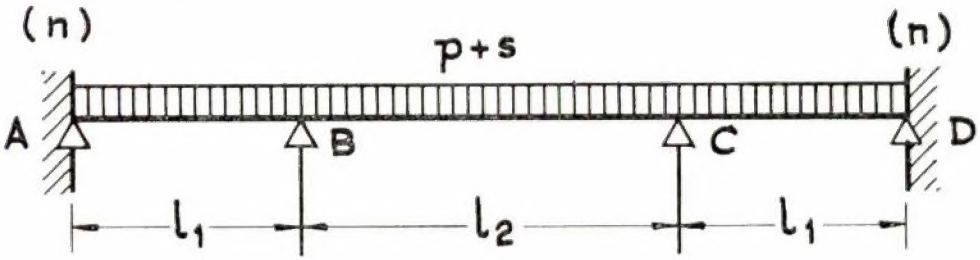

| $l_2/l_1$ | n = 1/2 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k_A = k_D$ | $k_B = k_C$ | $k'_A = k'''_D$ | $k''_B = k'''_C$ | $k'_C = k'''_B$ | $k_D = k'''_A$ | $k''_A = k''_D$ | $k''_B = k''_C$ |
| | $-pl_1^2$ | | $-sl_1^2$ | | $sl_1^2$ | $-sl_1^2$ | $sl_1^2$ | $-sl_1^2$ |
| 0,4 | 0,0524 | 0,0668 | 0,0506 | 0,0729 | 0,0116 | 0,0033 | 0,0016 | 0,0055 |
| 0,5 | 0,0528 | 0,0653 | 0,0520 | 0,0681 | 0,0125 | 0,0036 | 0,0028 | 0,0097 |
| 0,6 | 0,0525 | 0,0662 | 0,0531 | 0,0640 | 0,0132 | 0,0038 | 0,0044 | 0,0154 |
| 0,7 | 0,0516 | 0,0693 | 0,0542 | 0,0604 | 0,0136 | 0,0039 | 0,0064 | 0,0225 |
| 0,8 | 0,0501 | 0,0745 | 0,0551 | 0,0572 | 0,0138 | 0,0039 | 0,0089 | 0,0311 |
| 0,9 | 0,0481 | 0,0817 | 0,0559 | 0,0544 | 0,0139 | 0,0040 | 0,0118 | 0,0413 |
| 1,0 | 0,0455 | 0,0909 | 0,0566 | 0,0518 | 0,0140 | 0,0040 | 0,0152 | 0,0530 |
| 1,1 | 0,0423 | 0,1020 | 0,0573 | 0,0495 | 0,0139 | 0,0040 | 0,0190 | 0,0664 |
| 1,2 | 0,0386 | 0,1149 | 0,0579 | 0,0474 | 0,0138 | 0,0040 | 0,0232 | 0,0813 |
| 1,25 | 0,0366 | 0,1220 | 0,0582 | 0,0465 | 0,0138 | 0,0039 | 0,0255 | 0,0894 |
| 1,3 | 0,0344 | 0,1296 | 0,0584 | 0,0455 | 0,0137 | 0,0039 | 0,0280 | 0,0978 |
| 1,4 | 0,0297 | 0,1462 | 0,0589 | 0,0438 | 0,0136 | 0,0039 | 0,0331 | 0,1160 |
| 1,5 | 0,0244 | 0,1645 | 0,0594 | 0,0421 | 0,0134 | 0,0038 | 0,0388 | 0,1358 |
| 1,6 | 0,0187 | 0,1846 | 0,0598 | 0,0406 | 0,0132 | 0,0038 | 0,0449 | 0,1572 |
| 1,7 | 0,0124 | 0,2065 | 0,0602 | 0,0393 | 0,0130 | 0,0037 | 0,0515 | 0,1802 |
| 1,8 | 0,0057 | 0,2300 | 0,0606 | 0,0380 | 0,0129 | 0,0037 | 0,0586 | 0,2049 |
| 1,9 | —0,0015 | 0,2554 | 0,0609 | 0,0367 | 0,0127 | 0,0036 | 0,0661 | 0,2313 |
| 2,0 | —0,0093 | 0,2824 | 0,0613 | 0,0356 | 0,0125 | 0,0036 | 0,0741 | 0,2593 |
| 2,25 | —0,0307 | 0,3575 | 0,0620 | 0,0331 | 0,0120 | 0,0034 | 0,0961 | 03364 |
| 2,5 | —0,0552 | 0,4433 | 0,0626 | 0,0309 | 0,0115 | 0,0033 | 0,1211 | 0,4239 |
| 3,0 | —0,1133 | 0,6467 | 0,0636 | 0,0273 | 0,0106 | 0,0030 | 0,1800 | 0,6300 |

TABELA 7 — Viga continua de três tramos (cont.)




| $l_2/l_1$ | n = 3/4 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k_A = k_D$ | $k_B = k_C$ | $k'_A = k'''_D$ | $k'_B = k'''_C$ | $k'_C = k'''_B$ | $k'_D = k'''_A$ | $k''_A = k''_D$ | $k''_B = k''_C$ |
| | $-pl_1^2$ | | $-sl_1^2$ | | $sl_1^2$ | $-sl_1^2$ | $sl_1^2$ | $-sl_1^2$ |
| 0,4 | 0,0763 | 0,0593 | 0,0743 | 0,0643 | 0,0107 | 0,0043 | 0,0023 | 0,0057 |
| 0,5 | 0,0766 | 0,0585 | 0,0760 | 0,0599 | 0,0115 | 0,0046 | 0,0040 | 0,0101 |
| 0,6 | 0,0760 | 0,0600 | 0,0775 | 0,0561 | 0,0120 | 0,0048 | 0,0064 | 0,0159 |
| 0,7 | 0,0745 | 0,0637 | 0,0788 | 0,0529 | 0,0123 | 0,0049 | 0,0093 | 0,0232 |
| 0,8 | 0,0722 | 0,0695 | 0,0800 | 0,0500 | 0,0125 | 0,0050 | 0,0128 | 0,0320 |
| 0,9 | 0,0691 | 0,0773 | 0,0810 | 0,0474 | 0,0126 | 0,0050 | 0,0170 | 0,0424 |
| 1,0 | 0,0652 | 0,0870 | 0,0819 | 0,0452 | 0,0125 | 0,0050 | 0,0217 | 0,0543 |
| 1,1 | 0,0606 | 0,0985 | 0,0828 | 0,0431 | 0,0125 | 0,0050 | 0,0272 | 0,0679 |
| 1,2 | 0,0552 | 0,1119 | 0,0835 | 0,0412 | 0,0124 | 0,0049 | 0,0332 | 0,0831 |
| 1,25 | 0,0523 | 0,1193 | 0,0839 | 0,0403 | 0,0123 | 0,0049 | 0,0365 | 0,0913 |
| 1,3 | 0,0491 | 0,1271 | 0,0842 | 0,0395 | 0,0122 | 0,0049 | 0,0399 | 0,0999 |
| 1,4 | 0,0423 | 0,1441 | 0,0848 | 0,0379 | 0,0121 | 0,0048 | 0,0473 | 0,1183 |
| 1,5 | 0,0348 | 0,1629 | 0,0854 | 0,0365 | 0,0119 | 0,0048 | 0,0553 | 0,1383 |
| 1,6 | 0,0266 | 0,01834 | 0,0859 | 0,0352 | 0,0117 | 0,0047 | 0,0640 | 0,1600 |
| 1,7 | 0,0177 | 0,2057 | 0,0864 | 0,0339 | 0,0115 | 0,0046 | 0,0733 | 0,1833 |
| 1,8 | 0,0081 | 0,2297 | 0,0869 | 0,0328 | 0,0113 | 0,0045 | 0,0833 | 0,2083 |
| 1,9 | —0,0022 | 0,2554 | 0,0873 | 0,0317 | 0,0112 | 0,0045 | 0,0940 | 0,2349 |
| 2,0 | —0,0132 | 0,2829 | 0,0877 | 0,0307 | 0,0110 | 0,0044 | 0,1053 | 0,2632 |
| 2,25 | —0,0436 | 0,3590 | 0,0886 | 0,0285 | 0,0105 | 0,0042 | 0,1364 | 0,3410 |
| 2,5 | —0,0783 | 0,4457 | 0,0894 | 0,0265 | 0,0101 | 0,0040 | 0,1717 | 0,4293 |
| 3,0 | —0,1604 | 0,6509 | 0,0906 | 0,0234 | 0,0092 | 0,0037 | 0,2547 | 0,6363 |

TABELA 7 — Viga contínua de três tramos (cont.)




| $l_2/l_1$ | n = 1 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k_A = k_D$ | $k_B = k_C$ | | $k'_B = k'''_C$ | $k'_C = k'''_B$ | $k'_D = k'''_A$ | $k''_A = k''_D$ | $k''_B = k''_C$ |
| | $-pl_1^2$ | | $-sl_1^2$ | | $sl_1^2$ | $-sl_1^2$ | $sl_1^2$ | $-sl_1^2$ |
| 0,4 | 0,0989 | 0,0552 | 0,0970 | 0,0560 | 0,0097 | 0,0049 | 0,0030 | 0,0059 |
| 0,5 | 0,0990 | 0,0521 | 0,0990 | 0,0521 | 0,0104 | 0,0052 | 0,0052 | 0,0104 |
| 0,6 | 0,0979 | 0,0542 | 0,1006 | 0,0487 | 0,0108 | 0,0054 | 0,0082 | 0,0164 |
| 0,7 | 0,0957 | 0,0585 | 01021 | 0,0458 | 0,0110 | 0,0055 | 0,0119 | 0,0238 |
| 0,8 | 0,0926 | 0,0649 | 0,1034 | 0,0432 | 0,0111 | 0,0056 | 0,0164 | 0,0328 |
| 0,9 | 0,0884 | 0,0732 | 0,1045 | 0,0409 | 0,0112 | 0,0056 | 0,0217 | 0,0434 |
| 1,0 | 0,0833 | 0,0833 | 0,1056 | 0,0389 | 0,0111 | 0,0056 | 0,0278 | 0,0556 |
| 1,1 | 0,0773 | 0,0954 | 0,1065 | 0,0371 | 0,0110 | 0,0055 | 0,0347 | 0,0693 |
| 1,2 | 0,0704 | 0,1092 | 0,1073 | 0,0354 | 0,0109 | 0,0054 | 0,0424 | 0,0847 |
| 1,25 | 0,0666 | 0,1168 | 0,1077 | 0,0346 | 0,0108 | 0,0054 | 0,0465 | 0,0930 |
| 1,3 | 0,0626 | 0,1249 | 0,1081 | 0,0339 | 0,0107 | 0,0054 | 0,0509 | 0,1017 |
| 1,4 | 0,0539 | 0,1423 | 0,1087 | 0,0325 | 0,0106 | 0,0053 | 0,0602 | 0,1204 |
| 1,5 | 0,0443 | 0,1615 | 0,1094 | 0,0312 | 0,0104 | 0,0052 | 0,0703 | 0,1406 |
| 1,6 | 0,0338 | 0,1824 | 0,1100 | 0,0301 | 0,0102 | 0,0051 | 0,0813 | 0,1625 |
| 1,7 | 0,0225 | 0,2050 | 0,1105 | 0,0290 | 0,0101 | 0,0050 | 0,0930 | 0,1861 |
| 1,8 | 0,0103 | 0,2294 | 0,1110 | 0,0280 | 0,0099 | 0,0049 | 0,1057 | 02113 |
| 1,9 | — 0,0028 | 0,2555 | 0,1115 | 0,0271 | 0,0097 | 0,0049 | 0,1191 | 0,2382 |
| 2,0 | — 0,0167 | 0,2833 | 0,1119 | 0,0262 | 0,0095 | 0,0048 | 0,1333 | 0,2667 |
| 2,25 | — 0,0552 | 0,3603 | 0,1129 | 0,0242 | 0,0091 | 0,0045 | 0,1726 | 0,3452 |
| 2,5 | — 0,0990 | 0,4479 | 0,1137 | 0,0226 | 0,0087 | 0,0043 | 0,2170 | 0,4340 |
| 3,0 | — 0,2024 | 0,6548 | 0,1151 | 0,0198 | 0,0079 | 0,0040 | 0,3214 | 0,6429 |

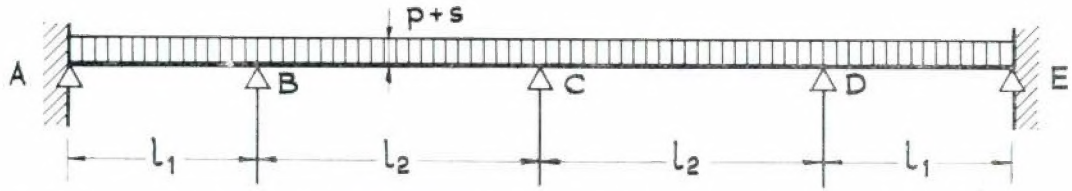



TABELA 8 — Viga continua de quatro tramos, parcialmente encastrada nos apoios extremos, com cargas uniformemente distribuidas

| $l_2/l_1$ | n = 0 | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k_A = k_E$ | $k_B = k_D$ | $k_C$ | $k'_A = k'^{IV}_E$ | $k'_B = k'^{IV}_D$ | $k'_C = k'^{IV}_C$ | $k'_D = k'^{IV}_B$ | $k'_E = k'^{IV}_A$ | $k''_A = k''^{III}_E$ | $k''_B = k''^{III}_D$ | $k''_C = k''^{III}_C$ | $k''_D = k''^{III}_B$ | $k''_E = k''^{III}_A$ |
| | $-pl_1^2$ | | | $-sl_1^2$ | | $+sl_1^2$ | $-sl_1^2$ | $+sl_1^2$ | | $-sl_1^2$ | | $+sl_1^2$ | $-sl_1^2$ |
| 0,4 | 0,0000 | 0,0992 | — 0,0296 | 0,0000 | 0,0927 | 0,0240 | 0,0034 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0044 | 0,0092 | 0,0013 | 0,0000 |
| 0,5 | 0,0000 | 0,0966 | — 0,0170 | 0,0000 | 0,0871 | 0,0227 | 0,0038 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0080 | 0,0142 | 0,0024 | 0,0000 |
| 0,6 | 0,0000 | 0,0955 | — 0,0028 | 0,0000 | 0,0822 | 0,0216 | 0,0040 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0131 | 0,0202 | 0,0038 | 0,0000 |
| 0,7 | 0,0000 | 0,0960 | 0,0132 | 0,0000 | 0,0777 | 0,0205 | 0,0042 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0196 | 0,0271 | 0,0056 | 0,0000 |
| 0,8 | 0,0000 | 0,0981 | 0,0309 | 0,0000 | 0,0738 | 0,0195 | 0,0043 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0278 | 0,0350 | 0,0078 | 0,0000 |
| 0,9 | 0,0000 | 0,1018 | 0,0503 | 0,0000 | 0,0702 | 0,0187 | 0,0044 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0376 | 0,0438 | 0,0104 | 0,0000 |
| 1,0 | 0,0000 | 0,1071 | 0,0714 | 0,0000 | 0,0670 | 0,0179 | 0,0045 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0491 | 0,0536 | 0,0134 | 0,0000 |
| 1,1 | 0,0000 | 0,1141 | 0,0942 | 0,0000 | 0,0640 | 0,0171 | 0,0045 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0624 | 0,0642 | 0,0168 | 0,0000 |
| 1,2 | 0,0000 | 0,1226 | 0,1187 | 0,0000 | 0,0613 | 0,0164 | 0,0045 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0775 | 0,0758 | 0,0207 | 0,0000 |
| 1,25 | 0,0000 | 0,1275 | 0,1316 | 0,0000 | 0,0600 | 0,0161 | 0,0045 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0858 | 0,0819 | 0,0228 | 0,0000 |
| 1,3 | 0,0000 | 0,1328 | 0,1448 | 0,0000 | 0,0588 | 0,0158 | 0,0045 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0945 | 0,0882 | 0,0249 | 0,0000 |
| 1,4 | 0,0000 | 0,1446 | 0,1727 | 0,0000 | 0,0565 | 0,0152 | 0,0044 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1133 | 0,1016 | 0,0296 | 0,0000 |
| 1,5 | 0,0000 | 0,1581 | 0,2022 | 0,0000 | 0,0544 | 0,0147 | 0,0044 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1340 | 0,01158 | 0,0347 | 0,0000 |
| 1,6 | 0,0000 | 0,1732 | 0,2334 | 0,0000 | 0,0524 | 0,0142 | 0,0044 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1566 | 0,1309 | 0,0403 | 0,0000 |
| 1,7 | 0,0000 | 0,1899 | 0,2663 | 0,0000 | 0,0506 | 0,0137 | 0,0043 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1812 | 0,1469 | 0,0462 | 0,0000 |
| 1,8 | 0,0000 | 0,2083 | 0,3009 | 0,0000 | 0,0489 | 0,0133 | 0,0043 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2077 | 0,1637 | 0,0526 | 0,0000 |
| 1,9 | 0,0000 | 0,2283 | 0,3371 | 0,0000 | 0,0473 | 0,0129 | 0,0042 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2362 | 0,1814 | 0,0594 | 0,0000 |
| 2,0 | 0,0000 | 0,2500 | 0,3750 | 0,0000 | 0,0458 | 0,0125 | 0,0042 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2667 | 0,2000 | 0,0667 | 0,0000 |
| 2,25 | 0,0000 | 0,3114 | 0,4771 | 0,0000 | 0,0425 | 0,0116 | 0,0040 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3515 | 0,2502 | 0,0866 | 0,0000 |
| 2,5 | 0,0000 | 0,3852 | 0,5897 | 0,0000 | 0,0396 | 0,0109 | 0,0039 | 0,0000 | 0,0000 | 0,4489 | 0,3057 | 0,1092 | 0,0000 |
| 3,0 | 0,0000 | 0,5577 | 0,8462 | 0,0000 | 0,0349 | 0,0096 | 0,0036 | 0,0000 | 0,0000 | 0,6815 | 0,4327 | 0,1623 | 0,0000 |

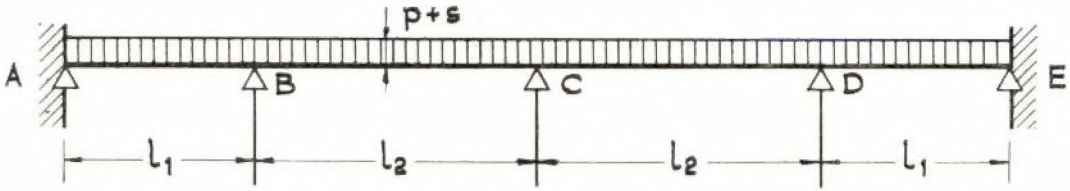



TABELA 8 — Viga continua de quatro tramos (cont.)

| $l_2/l_1$ | n = 1/4 | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k_A = k_E$ | $k_B = k_D$ | $k_C$ | $k'_A = k'^{IV}_E$ | $k'_B = k'^{IV}_D$ | $k'_C = k'^{IV}_C$ | $k'_D = k'^{IV}_B$ | $k'_E = k'^{IV}_A$ | $k''_A = k'''_E$ | $k''_B = k'''_D$ | $k''_C = k'''_C$ | $k''_D = k'''_B$ | $k''_E = k'''_A$ |
| | $-pl_1^2$ | | | $-sl_1^2$ | | $+sl_1^2$ | $-sl_1^2$ | $+sl_1^2$ | | $-sl_1^2$ | | $+sl_1^2$ | $-sl_1^2$ |
| 0,4 | 0,0247 | 0,0897 | — 0,0249 | 0,0257 | 0,0832 | 0,0216 | 0,0033 | 0,0005 | 0,0007 | 0,0047 | 0,0092 | 0,0014 | 0,0002 |
| 0,5 | 0,0250 | 0,0875 | — 0,0125 | 0,0265 | 0,0779 | 0,0204 | 0,0036 | 0,0006 | 0,0013 | 0,0085 | 0,0141 | 0,0025 | 0,0004 |
| 0,6 | 0,0251 | 0,0869 | 0,0016 | 0,0272 | 0,0732 | 0,0193 | 0,0038 | 0,0006 | 0,0021 | 0,0138 | 0,0200 | 0,0039 | 0,0006 |
| 0,7 | 0,0249 | 0,0878 | 0,0173 | 0,0278 | 0,0691 | 0,0183 | 0,0039 | 0,0006 | 0,0032 | 0,0206 | 0,0269 | 0,0058 | 0,0009 |
| 0,8 | 0,0245 | 0,0905 | 0,0348 | 0,0284 | 0,0654 | 0,0174 | 0,0040 | 0,0006 | 0,0045 | 0,0291 | 0,0347 | 0,0081 | 0,0012 |
| 0,9 | 0,0239 | 0,0947 | 0,0539 | 0,0289 | 0,0621 | 0,0165 | 0,0041 | 0,0006 | 0,0060 | 0,0392 | 0,0435 | 0,0107 | 0,0017 |
| 1,0 | 0,0230 | 0,1006 | 0,0747 | 0,0294 | 0,0591 | 0,0158 | 0,0041 | 0,0006 | 0,0079 | 0,0512 | 0,0532 | 0,0138 | 0,0021 |
| 1,1 | 0,0218 | 0,1081 | 0,0972 | 0,0298 | 0,0564 | 0,0151 | 0,0041 | 0,0006 | 0,0100 | 0,0649 | 0,0637 | 0,0173 | 0,0027 |
| 1,2 | 0,0204 | 0,1173 | 0,1214 | 0,0302 | 0,0539 | 0,0145 | 0,0041 | 0,0006 | 0,0124 | 0,0805 | 0,0752 | 0,0212 | 0,0033 |
| 1,25 | 0,0196 | 0,1225 | 0,1341 | 0,0303 | 0,0528 | 0,0142 | 0,0041 | 0,0006 | 0,0137 | 0,0890 | 0,0813 | 0,0234 | 0,0036 |
| 1,3 | 0,0188 | 0,1281 | 0,1472 | 0,0305 | 0,0517 | 0,0139 | 0,0041 | 0,0006 | 0,0151 | 0,0979 | 0,0875 | 0,0256 | 0,0039 |
| 1,4 | 0,0168 | 0,1405 | 0,1747 | 0,0308 | 0,0496 | 0,0134 | 0,0040 | 0,0006 | 0,0180 | 0,1173 | 0,1008 | 0,0304 | 0,0047 |
| 1,5 | 0,0147 | 0,1546 | 0,2039 | 0,0311 | 0,0476 | 0,0129 | 0,0040 | 0,0006 | 0,0213 | 0,1386 | 0,1149 | 0,0356 | 0,0055 |
| 1,6 | 0,0122 | 0,1704 | 0,2348 | 0,0314 | 0,0459 | 0,0125 | 0,0039 | 0,0006 | 0,0245 | 0,1618 | 0,1299 | 0,0412 | 0,0063 |
| 1,7 | 0,0096 | 0,1878 | 0,2673 | 0,0317 | 0,0442 | 0,0120 | 0,0039 | 0,0006 | 0,0288 | 0,1869 | 0,1457 | 0,0472 | 0,0073 |
| 1,8 | 0,0066 | 0,2069 | 0,3016 | 0,0319 | 0,0427 | 0,0116 | 0,0038 | 0,0006 | 0,0329 | 0,2140 | 0,1624 | 0,0537 | 0,0083 |
| 1,9 | 0,0034 | 0,2276 | 0,3374 | 0,0321 | 0,0413 | 0,0113 | 0,0038 | 0,0006 | 0,0374 | 0,2431 | 0,1800 | 0,0606 | 0,0093 |
| 2,0 | 0,0000 | 0,2500 | 0,3750 | 0,0323 | 0,0399 | 0,0109 | 0,0037 | 0,0006 | 0,0421 | 0,2742 | 0,1984 | 0,0679 | 0,0104 |
| 2,25 | — 0,0097 | 0,3132 | 0,4762 | 0,0328 | 0,0369 | 0,0101 | 0,0036 | 0,0006 | 0,0555 | 0,3607 | 0,2482 | 0,0880 | 0,0135 |
| 2,5 | — 0,0210 | 0,3868 | 0,5878 | 0,0332 | 0,0343 | 0,0095 | 0,0035 | 0,0005 | 0,0707 | 0,4598 | 0,3034 | 0,1108 | 0,0170 |
| 3,0 | — 0,0485 | 0,5652 | 0,8424 | 0,0338 | 0,0301 | 0,0083 | 0,0032 | 0,0005 | 0,1071 | 0,6961 | 0,4295 | 0,1642 | 0,0253 |

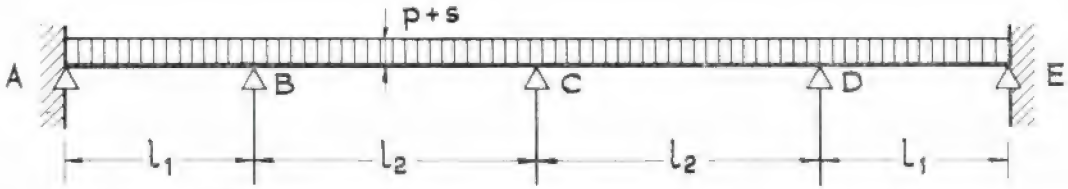



TABELA 8 — Viga continua de quatro tramos (cont.)

| $l_2/l_1$ | n = 1/2 | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k_A = k_E$ | $k_B = k_D$ | $k_C$ | $k'_A = k^{IV}_E$ | $k'_B = k^{IV}_D$ | $k'_C = k^{IV}_C$ | $k'_D = k^{IV}_B$ | $k'_E = k^{IV}_A$ | $k'_A = k^{III}_E$ | $k''_B = k^{III}_D$ | $k''_C = k^{III}_C$ | $k''_D = k^{III}_B$ | $k''_E = k^{III}_A$ |
| | $-pl_1^2$ | | | $-sl_1^2$ | | $+sl_1^2$ | $-sl_1^2$ | $+sl_1^2$ | | $-sl_1^2$ | | $+sl_1^2$ | $-sl_1^2$ |
| 0,4 | 0,0484 | 0,0806 | — 0,0203 | 0,0503 | 0,0741 | 0,0193 | 0,0031 | 0,0009 | 0,0014 | 0,0049 | 0,0091 | 0,0015 | 0,0004 |
| 0,5 | 0,0489 | 0,0788 | — 0,0082 | 0,0517 | 0,0691 | 0,0181 | 0,0033 | 0,0010 | 0,0026 | 0,0089 | 0,0140 | 0,0026 | 0,0007 |
| 0,6 | 0,0490 | 0,0786 | 0,0057 | 0,0529 | 0,0658 | 0,0171 | 0,0035 | 0,0010 | 0,0041 | 0,0144 | 0,0199 | 0,0041 | 0,0012 |
| 0,7 | 0,0485 | 0,0801 | 0,0212 | 0,0540 | 0,0610 | 0,0161 | 0,0036 | 0,0010 | 0,0061 | 0,0215 | 0,0267 | 0,0060 | 0,0017 |
| 0,8 | 0,0476 | 0,0832 | 0,0384 | 0,0550 | 0,0576 | 0,0153 | 0,0037 | 0,0011 | 0,0087 | 0,0303 | 0,0345 | 0,0083 | 0,0024 |
| 0,9 | 0,0463 | 0,0880 | 0,0572 | 0,0558 | 0,0545 | 0,0146 | 0,0037 | 0,0011 | 0,0117 | 0,0408 | 0,0432 | 0,0111 | 0,0032 |
| 1,0 | 0,0444 | 0,0944 | 0,0778 | 0,0566 | 0,0518 | 0,0139 | 0,0037 | 0,0011 | 0,0152 | 0,0531 | 0,0528 | 0,0142 | 0,0041 |
| 1,1 | 0,0421 | 0,1025 | 0,1000 | 0,0573 | 0,0493 | 0,0133 | 0,0037 | 0,0011 | 0,0192 | 0,0672 | 0,0633 | 0,0178 | 0,0051 |
| 1,2 | 0,0393 | 0,1123 | 0,1239 | 0,0580 | 0,0471 | 0,0127 | 0,0037 | 0,0011 | 0,0238 | 0,0832 | 0,0746 | 0,0218 | 0,0062 |
| 2,25 | 0,0378 | 0,1178 | 0,1364 | 0,0583 | 0,0461 | 0,0124 | 0,0037 | 0,0011 | 0,0263 | 0,0919 | 0,0807 | 0,0239 | 0,0068 |
| 1,3 | 0,0361 | 0,1237 | 0,1494 | 0,0586 | 0,0451 | 0,0122 | 0,0037 | 0,0010 | 0,0289 | 0,1011 | 0,0869 | 0,0262 | 0,0075 |
| 1,4 | 0,0324 | 0,1367 | 0,1766 | 0,0591 | 0,0432 | 0,0117 | 0,0036 | 0,0010 | 0,0346 | 0,1209 | 0,1000 | 0,0310 | 0,0089 |
| 1,5 | 0,0282 | 0,1515 | 0,2055 | 0,0596 | 0,0415 | 0,0113 | 0,0036 | 0,0010 | 0,0408 | 0,1427 | 0,1140 | 0,0363 | 0,0104 |
| 1,6 | 0,0235 | 0,1678 | 0,2361 | 0,0600 | 0,0399 | 0,0109 | 0,0035 | 0,0010 | 0,0475 | 0,1664 | 0,1289 | 0,0420 | 0,0120 |
| 1,7 | 0,0183 | 0,1859 | 0,2683 | 0,0605 | 0,0384 | 0,0105 | 0,0035 | 0,0010 | 0,0549 | 0,1921 | 0,1446 | 0,0481 | 0,0137 |
| 1,8 | 0,0127 | 0,2056 | 0,3022 | 0,0608 | 0,0370 | 0,0101 | 0,0034 | 0,0010 | 0,0628 | 0,2198 | 0,1612 | 0,0546 | 0,0156 |
| 1,9 | 0,0066 | 0,2270 | 0,3378 | 0,0612 | 0,0358 | 0,0098 | 0,0034 | 0,0010 | 0,0713 | 0,2494 | 0,1787 | 0,0616 | 0,0176 |
| 2,0 | 0,0000 | 0,2500 | 0,3750 | 0,0616 | 0,0346 | 0,0095 | 0,0033 | 0,0009 | 0,0803 | 0,2811 | 0,1970 | 0,0689 | 0,0197 |
| 2,25 | — 0,0185 | 0,3149 | 0,4754 | 0,0623 | 0,0319 | 0,0088 | 0,0032 | 0,0009 | 0,1054 | 0,3690 | 0,2465 | 0,0892 | 0,0255 |
| 2,5 | — 0,0400 | 0,3901 | 0,5862 | 0,0630 | 0,0296 | 0,0082 | 0,0030 | 0,0009 | 0,1342 | 0,4696 | 0,3013 | 0,1122 | 0,0320 |
| 3,0 | — 0,0920 | 0,5718 | 0,8391 | 0,0640 | 0,0259 | 0,0072 | 0,0028 | 0,0008 | 0,2026 | 0,7091 | 0,4267 | 0,1659 | 0,0474 |

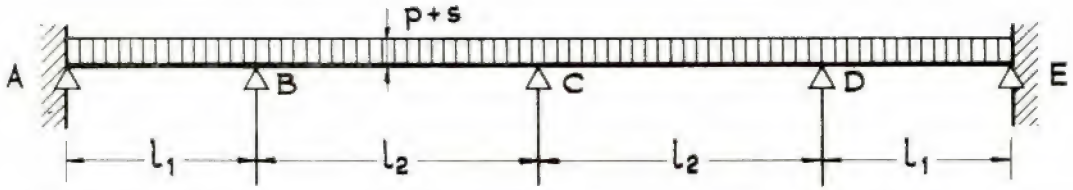



TABELA 8 — Viga continua de quatro tramos (cont.)

| $l_2/l_1$ | n = 3/4 | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k_A = k_E$ | $k_B = k_D$ | $k_C$ | $k'_A = k^{IV}_E$ | $k'_B = k'_D$ | $k'_C = k^{IV}_C$ | $k'_D = k^{IV}_B$ | $k'_E = k^{IV}_A$ | $k^{II}_A = k^{III}_E$ | $k^{II}_B = k^{III}_D$ | $k^{II}_C = k^{III}_C$ | $k^{II}_D = k^{III}_B$ | $k^{II}_E = k^{III}_A$ |
| | $-pl_1^2$ | | | $-sl_1^2$ | | $+sl_1^2$ | $-sl_1^2$ | $+sl_1^2$ | | $-sl_1^2$ | | $+sl_1^2$ | $-sl_1^2$ |
| 0,4 | 0,0713 | 0,0718 | — 0,0159 | 0,0739 | 0,0653 | 0,0170 | 0,0028 | 0,0011 | 0,0021 | 0,0052 | 0,0091 | 0,0015 | 0,0006 |
| 0,5 | 0,0718 | 0,0705 | — 0,0040 | 0,0757 | 0,0608 | 0,0160 | 0,0031 | 0,0012 | 0,0037 | 0,0093 | 0,0140 | 0,0027 | 0,0011 |
| 0,6 | 0,0717 | 0,0708 | 0,0096 | 0,0773 | 0,0568 | 0,0150 | 0,0032 | 0,0013 | 0,0060 | 0,0150 | 0,0198 | 0,0042 | 0,0017 |
| 0,7 | 0,0709 | 0,0728 | 0,0249 | 0,0787 | 0,0533 | 0,0142 | 0,0033 | 0,0013 | 0,0090 | 0,0224 | 0,0266 | 0,0062 | 0,0025 |
| 0,8 | 0,0694 | 0,0764 | 0,0418 | 0,0799 | 0,0502 | 0,0134 | 0,0033 | 0,0013 | 0,0126 | 0,0314 | 0,0343 | 0,0086 | 0,0034 |
| 0,9 | 0,0673 | 0,0817 | 0,0604 | 0,0810 | 0,0475 | 0,0127 | 0,0034 | 0,0013 | 0,0169 | 0,0422 | 0,0429 | 0,0134 | 0,0045 |
| 1,0 | 0,0645 | 0,0887 | 0,0806 | 0,0820 | 0,0450 | 0,0121 | 0,0034 | 0,0013 | 0,0220 | 0,0549 | 0,0524 | 0,0146 | 0,0058 |
| 1,1 | 0,0611 | 0,0973 | 0,1026 | 0,0829 | 0,0428 | 0,0115 | 0,0033 | 0,0013 | 0,0278 | 0,0694 | 0,0628 | 0,0182 | 0,0073 |
| 1,2 | 0,0569 | 0,1076 | 0,1262 | 0,0837 | 0,0408 | 0,0110 | 0,0033 | 0,0013 | 0,0343 | 0,0858 | 0,0741 | 0,0222 | 0,0089 |
| 1,25 | 0,0546 | 0,1134 | 0,1386 | 0,0840 | 0,0399 | 0,0108 | 0,0033 | 0,0013 | 0,0379 | 0,0947 | 0,0801 | 0,0244 | 0,0098 |
| 1,3 | 0,0522 | 0,1196 | 0,1514 | 0,0844 | 0,0390 | 0,0106 | 0,0033 | 0,0013 | 0,0416 | 0,1041 | 0,0863 | 0,0267 | 0,0107 |
| 1,4 | 0,0467 | 0,1332 | 0,1784 | 0,0851 | 0,0373 | 0,0101 | 0,0032 | 0,0013 | 0,0497 | 0,1243 | 0,0993 | 0,0316 | 0,0126 |
| 1,5 | 0,0406 | 0,1485 | 0,2070 | 0,0857 | 0,0358 | 0,0097 | 0,0032 | 0,0013 | 0,0586 | 0,1465 | 0,1132 | 0,0369 | 0,0148 |
| 1,6 | 0,0338 | 0,1655 | 0,2372 | 0,0863 | 0,0344 | 0,0094 | 0,0031 | 0,0013 | 0,0683 | 0,1707 | 0,1280 | 0,0427 | 0,0171 |
| 1,7 | 0,0263 | 0,1841 | 0,2692 | 0,0868 | 0,0331 | 0,0090 | 0,0031 | 0,0012 | 0,0787 | 0,1968 | 0,1436 | 0,0488 | 0,0195 |
| 1,8 | 0,0182 | 0,2044 | 0,3028 | 0,0873 | 0,0319 | 0,0087 | 0,0030 | 0,0012 | 0,0900 | 0,2250 | 0,1601 | 0,0554 | 0,0222 |
| 1,9 | 0,0094 | 0,2264 | 0,3381 | 0,0877 | 0,0307 | 0,0084 | 0,0030 | 0,0012 | 0,1020 | 0,2551 | 0,1775 | 0,0624 | 0,0250 |
| 2,0 | 0,0000 | 0,2500 | 0,3750 | 0,0881 | 0,0297 | 0,0082 | 0,0029 | 0,0012 | 0,1149 | 0,2873 | 0,1957 | 0,0699 | 0,0280 |
| 2,25 | — 0,0266 | 0,3163 | 0,4746 | 0,0891 | 0,0274 | 0,0075 | 0,0028 | 0,0011 | 0,1506 | 0,3765 | 0,2449 | 0,0903 | 0,0361 |
| 2,5 | — 0,0572 | 0,3931 | 0,5847 | 0,0898 | 0,0254 | 0,0070 | 0,0027 | 0,0011 | 0,1914 | 0,4785 | 0,2994 | 0,1134 | 0,0454 |
| 3,0 | — 0,1311 | 0,5779 | 0,8361 | 0,0911 | 0,0222 | 0,0061 | 0,0024 | 0,0010 | 0,2883 | 0,7207 | 0,4242 | 0,1674 | 0,0670 |

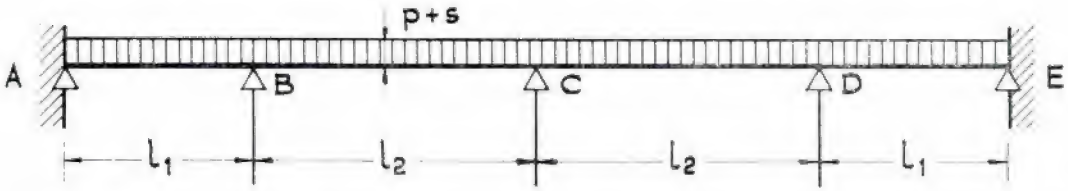



TABELA 8 — Viga continua de quatro tramos (cont.)

| $l_2/l_1$ | n = 1 | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k_A = k_E$ | $k_A = k_D$ | $k_C$ | $k^I_A = k^{IV}_E$ | $k^I_B = k^{IV}_D$ | $k^I_C = k^{IV}_C$ | $k^I_D = k^{IV}_B$ | $k^I_E = k^{IV}_A$ | $k^{II}_A = k^{III}_E$ | $k^{II}_B = k^{III}_D$ | $k^{II}_C = k^{III}_C$ | $k^{II}_D = k^{III}_B$ | $k^{II}_E = k^{III}_A$ |
| | $-pl_1^2$ | | | $-sl_1^2$ | | $+sl_1^2$ | $-sl_1^2$ | $+sl_1^2$ | | $-sl_1^2$ | | $+sl_1^2$ | $-sl_1^2$ |
| 0,4 | 0,0933 | 0,0633 | — 0,0117 | 0,0965 | 0,0569 | 0,0149 | 0,0026 | 0,0013 | 0,0027 | 0,0054 | 0,0090 | 0,0016 | 0,0008 |
| 0,5 | 0,0937 | 0,0625 | — 0,0000 | 0,0986 | 0,0528 | 0,0139 | 0,0028 | 0,0014 | 0,0049 | 0,0097 | 0,0139 | 0,0028 | 0,0014 |
| 0,6 | 0,0933 | 0,0633 | 0,0133 | 0,1004 | 0,0492 | 0,0130 | 0,0029 | 0,0014 | 0,0078 | 0,0156 | 0,0197 | 0,0044 | 0,0022 |
| 0,7 | 0,0921 | 0,0658 | 0,0283 | 0,1020 | 0,0461 | 0,0123 | 0,0030 | 0,0015 | 0,0116 | 0,0232 | 0,0264 | 0,0064 | 0,0032 |
| 0,8 | 0,0900 | 0,0700 | 0,0450 | 0,1033 | 0,0433 | 0,0116 | 0,0030 | 0,0015 | 0,0162 | 0,0325 | 0,0341 | 0,0088 | 0,0044 |
| 0,9 | 0,0871 | 0,0758 | 0,0633 | 0,1046 | 0,0409 | 0,0110 | 0,0030 | 0,0015 | 0,0218 | 0,0436 | 0,0426 | 0,0116 | 0,0058 |
| 1,0 | 0,0833 | 0,0833 | 0,0833 | 0,1057 | 0,0387 | 0,0104 | 0,0030 | 0,0015 | 0,0283 | 0,0565 | 0,0521 | 0,0149 | 0,0074 |
| 1,1 | 0,0787 | 0,0925 | 0,1050 | 0,1066 | 0,0367 | 0,0099 | 0,0029 | 0,0015 | 0,0357 | 0,0714 | 0,0624 | 0,0186 | 0,0093 |
| 1,2 | 0,0733 | 0,1033 | 0,1283 | 0,1075 | 0,0350 | 0,0095 | 0,0029 | 0,0015 | 0,0441 | 0,0881 | 0,0736 | 0,0227 | 0,0113 |
| 1,25 | 0,0703 | 0,1094 | 0,1406 | 0,1079 | 0,0341 | 0,0093 | 0,0029 | 0,0015 | 0,0486 | 0,0972 | 0,0796 | 0,0249 | 0,0124 |
| 1,3 | 0,0671 | 0,1158 | 0,1533 | 0,1083 | 0,0334 | 0,0091 | 0,0029 | 0,0014 | 0,0534 | 0,1068 | 0,0857 | 0,0272 | 0,0136 |
| 1,4 | 0,0600 | 0,1300 | 0,1800 | 0,1091 | 0,0319 | 0,0087 | 0,0028 | 0,0014 | 0,0637 | 0,1274 | 0,0987 | 0,0321 | 0,0161 |
| 1,5 | 0,0521 | 0,1458 | 0,2083 | 0,1097 | 0,0306 | 0,0083 | 0,0028 | 0,0014 | 0,0750 | 0,1500 | 0,1125 | 0,0375 | 0,0187 |
| 1,6 | 0,0433 | 0,1633 | 0,2383 | 0,1103 | 0,0293 | 0,0080 | 0,0027 | 0,0014 | 0,0873 | 0,1746 | 0,1272 | 0,0433 | 0,0216 |
| 1,7 | 0,0337 | 0,1825 | 0,2700 | 0,1109 | 0,0282 | 0,0077 | 0,0027 | 0,0014 | 0,1006 | 0,2011 | 0,1427 | 0,0495 | 0,0248 |
| 1,8 | 0,0233 | 0,2033 | 0,3033 | 0,1114 | 0,0271 | 0,0074 | 0,0026 | 0,0013 | 0,1149 | 0,2297 | 0,1591 | 0,0562 | 0,0281 |
| 1,9 | 0,0121 | 0,2258 | 0,3383 | 0,1119 | 0,0262 | 0,0072 | 0,0026 | 0,0013 | 0,1302 | 0,2603 | 0,1764 | 0,0632 | 0,0316 |
| 2,0 | 0,0000 | 0,2500 | 0,3750 | 0,1124 | 0,0253 | 0,0069 | 0,0025 | 0,0013 | 0,1465 | 0,2929 | 0,1944 | 0,0707 | 0,0354 |
| 2,25 | — 0,0339 | 0,3177 | 0,4740 | 0,1134 | 0,0232 | 0,0064 | 0,0024 | 0,0012 | 0,1917 | 0,3833 | 0,2434 | 0,0913 | 0,0456 |
| 2,5 | — 0,0729 | 0,3958 | 0,5833 | 0,1142 | 0,0215 | 0,0060 | 0,0023 | 0,0011 | 0,2432 | 0,4865 | 0,2976 | 0,1145 | 0,0572 |
| 3,0 | — 0,1667 | 0,5833 | 0,8393 | 0,1156 | 0,0187 | 0,0052 | 0,0021 | 0,0010 | 0,3656 | 0,7312 | 0,4219 | 0,1687 | 0,0844 |

# INDUSTRIAIS TEXTEIS

PARA OS VOSSOS MANCHONS, FLANELAS, TRANSPORTADORES,
E TODOS OS TECIDOS TÉCNICOS

EM FIBRAS NATURAIS OU SINTÉTICAS

**Consultem:**

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEF.: 52091 PBX
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FABRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

# Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

(SONDADORA)

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES DE CIMENTO e outros produtos — INFRAESTRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

**Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português**

DELEGAÇÃO - LISBOA
Tr. do Guarda Mór, 13-r/c
Tel. 32 46 93 e 21 32 56

SEDE - LUANDA
R. Francisco Newton, 389/393
C. P. 2178 - Tel. 81 89 7

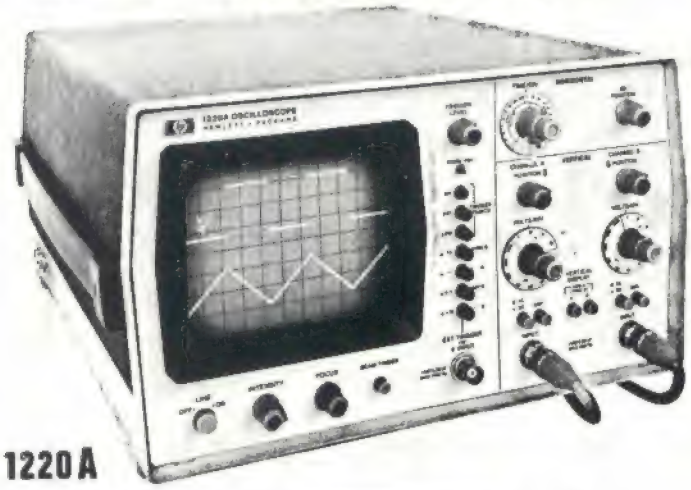
MOÇAMBIQUE
L. Marques - C. P. 982 - Tel. 74 11 21
Beira - C. P. 1002 - Tel. 7 14 97

# OSCILOSCÓPIOS

## CONCEBIDOS ESPECIALMENTE PARA O ENSINO TÉCNICO

HEWLETT hp PACKARD

1221A



1220A

| 1220A | 1221A |
|---|---|
| 2 CANAIS | 1 CANAL |
| DC A 15 MHZ | |
| SENSIBILIDADE 2mV/DIVISÃO | |

PEÇA INDICAÇÕES COMPLETAS A

TELECTRA

EMPRESA TÉCNICA DE EQUIPAMENTOS ELÉCTRICOS, S.A.R.L.

R. Rodrigo da Fonseca, 103 · LISBOA
Telefones 68 60 72 · 3 · 4 · 5 · Telex 1598
R. José Falcão, 15 · 4º Dto. PORTO · Tel. 2 62 09 · 3 33 50

NÚMERO 424 MARÇO DE 1975 ANO L VOLUME XXXVI PUBLICAÇÃO MENSAL

C. D. U. 539.232:543.42

# Espectros de massa e energia na formação de películas finas usando o processo de "evaporação por impacto"

LEOPOLDO J. M. GUIMARAES
Dept.º de Eng. Elect. da U. L.

RESUMO

*O conhecimento dos espectros de massa e de energia das partículas incidentes no substrato, quando da formação de Películas Finais é de extrema importância para a compreensão dos seus processos de formação e crescimento, intimamente ligados às propriedades macroscópias que apresentam. Para a determinação destes espectros, construiu-se um analisador de massa e de energia cuja montagem se adaptou ao estudo do processo de «Evaporação por Impacto».*

ABSTRACT

*The nature of the particles incident on a substracte is od basic interest for on understanding of the nucleation process of thin films obtained by deposition.*

*A sintable device has been constructed to study the nature and energy of those particles, using a «cathodic Sputtering» process.*

## 1 — INTRODUÇÃO

«Plículas finas» são camadas de material depositado sobre uma base adequada, ou substrato, com espessuras variando de poucas centenas de A° a alguns microns, o que corresponde a dimensões da ordem de algumas camadas atómicas.

O uso de «Películas Finas» tem sido largamente conhecido desde há centenas de anos, mas só muito recentemente se reconheceu o seu interesse em domínios que englobam quer a obtenção de sistemas ópticos e magnéticos, quer a electrónica duma maneira geral e a microelectrónica duma forma especial, quer ainda o estudo das estruturas de sólidos e suas propriedades físicas, naturalmente acompanhando o progresso e exigências inerentes àqueles domínios.

Estas películas, são produzidas depositando material sobre um suporte (base ou subtrato) utilizando-se para isso diferentes técnicas, algumas das quais actualmente em facto de pleno desenvolvimento. O crescimento da película durante a deposição envolve usualmente um estado de nucleação que caracteriza a formação de grupos estáveis de átomos e a subsequente coalescência ou união desses grupos. As características finais da película, serão função de vários parâmetros, entre os quais se destacam a temperatura do substrato, a velocidade de deposição e determinados parâmetros energéticos.

Existem várias razões para a constante expansão do uso de «Películas Finas» na Microelectrónica, das quais se evidência a possibilidade que estas películas oferecem em se conseguir circuitos de pequenas dimensões, a facilidade de produção de substâncias de elevada pureza ou de materiais de composição rigorosamente controlada e ainda a possibilidade de obtenção de circuitos com determinadas características de fundamental importância. No que respeita a tentativas já efectuadas para a utilização de Películas Finas como únicos elementos formadores de circuitos, tendo em vista as vantagens daí resultantes ao baixo custo de fabricação e facilidade de materialização de esquemas difíceis, não tem sido possível até hoje usar desse benefício, pois não se conseguiu ainda suplantar a actual tecnologia de circuitos monolíticos. No entanto, interessantes desenvolvimentos parecem possíveis sendo lícito esperar rápidos progressos, pois a citada inibição resulta principalmente do atraso relativo em que a técnica de crescimento de Películas Finas se encontra actualmente e não possibilidades que à primeira vista o processo em si oferece.

## 2 — A «EVAPORAÇÃO POR IMPACTO» NA FORMAÇÃO DE PELÍCULAS FINAS

Este método, traduz o fenómeno da ejecção de partículas de energia suficiente. O material libertado, na forma atómica ou molecular, pode condensar-se sobre uma superfície, formando depósitos com as propriedades características das Películas Finas obtidas por outros meios.

A realização laboratorial do processo, requer o bombardeamento dum alvo por partículas com suficiente energia, as quais podem ser partículas neutras ou iões. A simplicidade em acelerar partículas ionizadas e a dificuldade em obter partículas neutras com energia cinética suficiente, levaram ao uso sistemático de iões positivos, os quais podem ser gerados por dois processos fundamentais.

(1) — Através duma descarga luminosa em meio gasoso ionizado, como o alvo servindo simultâneamente de eléctrodo negativo, podendo o eléctrodo colector coincidir ou não com o ânodo. Neste caso, é aplicada uma tensão contínua de valor suficiente para desencadear e manter o fenómeno;

(2) — Usando um sistema que produza um feixe de iões que bombardeiam directamente o alvo.

Pode utilizar-se por exemplo uma corrente de electrões provenientes dum cátodo quente, a qual passando por um meio gasoso, origina a formação dum plasma.

Os iões são extraidos e acelerados na direcção do alvo, por acção dum campo eléctrico independente.

rizam as películas incidentes numa película na fase de formação. A comprovar esse facto, pode indicar-se os trabalhos de Layton e Campbel[1] donde se conclui que o crescimento epitaxial das películas depositadas está associado com a energia das partículas incidentes e o trabalho de Stirland[2] que mostrou que o bombardeamento electrónico do substracto pode desempenhar um papel importante no crescimento da película fina. Tem também sido sugerido que átomos ou electrões incidentes, podem produzir defeitos pontuais do substracto com resultado da sua penetração, podendo esses defeitos actuar como pontos de partida para a formação de núcleos estáveis.

## 3 — DESCRIÇÃO DO TRABALHO A REALIZAR

Tomando como que uma informação detalhada acerca da massa e energia das películas incidentes na superfície onde a película cresce, poderá explicar as razões que determinam as características particulares de cada partícula depositada, projectámos e construimos um sistema de modo a permitir essa observação[3]. O sistema apresenta-se em diagrama na figura 1, seguindo em certa medida o processo usado por J. Coburn[4] que apresentou pela primeira vez um trabalho especificamente devotado à determinação do espectro de massa relativa ao fenómeno da «Evaporação por Impacto»

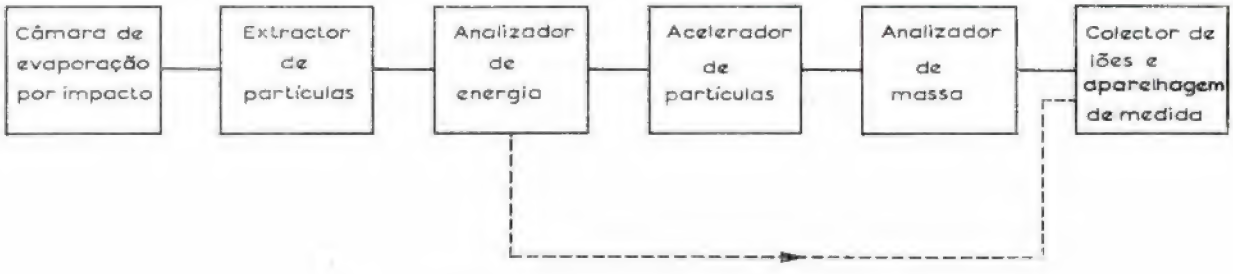



Fig. 1 — Diagrama de blocos do analizador de massa e energia

No que respeito propriamente à deposição, ou seja à nucleação e crescimento da película, foi constatado que ocorre diferentemente de acordo com o processo utilizado. De facto, tomando os dados publicados recentemente por vários autores , o uso da evaporação por impacto através duma descarga luminosa em meio gasoso ionizado, implica na primeira fase de crescimento das películas uma densidade de ilhas superior à encontrada para o processo de evaporação térmica no vácuo e uma maior facilidade de crescimento epitaxial, não tendo sido no entanto dada explicação plausível para esta ocorrência. Entre os factores que poderão contribuir para esta diferença de comportamento, tomam vulto a natureza e a energia que caracte-

usando uma descarga em meio gasoso ionizado, com tensão contínua aplicada aos electrodos.

A primeira parte do trabalho incidiu apenas sobre a determinação do espectro de energia das partículas incidentes e dentro destas somente se detectaram as partículas carregadas, eventualmente iões e electrões, pois a observação de partículas neutras exigira a introdução duma câmara de ionização por impacto, a qual se planeia instalar numa fase mais adiantada do projecto. O processo de deposição usado foi o de Evaporação por Impacto, utilizando-se o Argon como gás ambiente, com tensão contínua aplicada aos electrodos.

A figura 2 representa esquematicamente a disposição seguida.

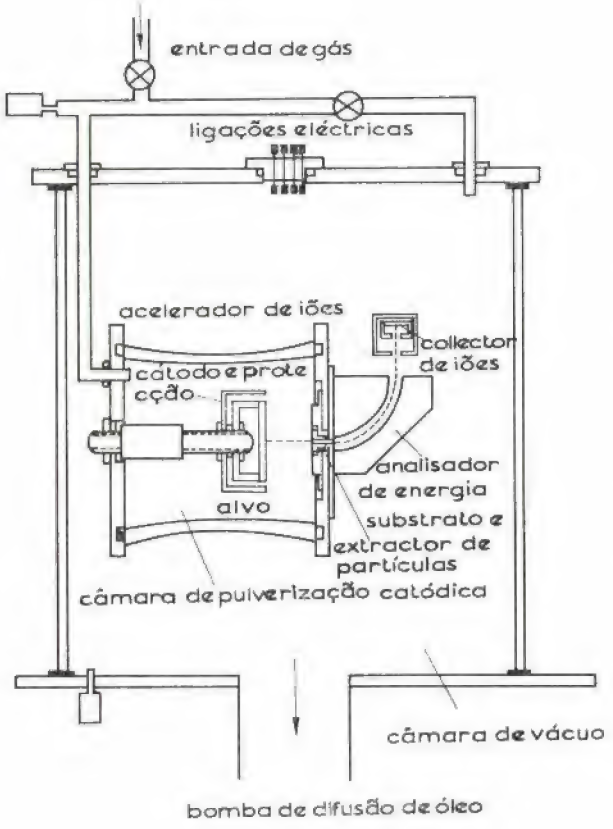



Fig 2 — Representação esquemática do arranjo para a determinação do espectro de energia das partículas incidentes no substrato durante a formação duma película fina

Seguindo a análise de Purcell[5], obtém-se um efeito de focagem das orbitas da partículas que saindo dum dado ponto (fonte) e entrada no condensador segundo um feixe divergente, são agrupadas após uma rotação de 180° de acordo com a energia que possuem e para para dada diferença de potencial $V_f$ aplicada às armaduras do condensador. De acordo com a figura 3, tem-se:

$$V_f = E\left[\frac{R_2}{R_1} - \frac{R_1}{R_2}\right]$$

onde E representa a energia da partícula (em volts equivalentes, qE = electrão volts) que segue a direcção normal na região (1)

O analisador de energia utilizado, é do tipo electrostático, de deflexão, consistindo fundamentalmente num sector de 90° formado por duas superfícies esféricas concêntricas.

Segue-se portanto que todas as partículas duma dada energia E deixando A segundo um feixe divergente de pequeno $\alpha$, serão aproximadamente focadas em B, desde que se aplique o valor correcto da diferença de potencial $V_f$ entre as duas superfícies esféricas.

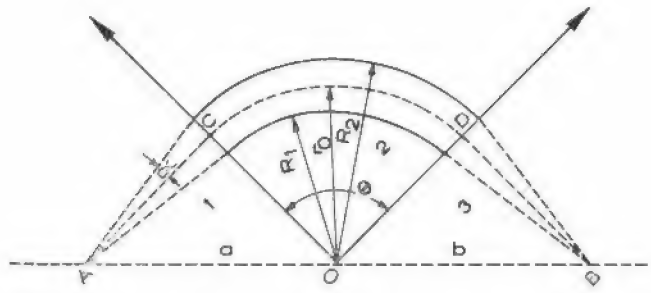
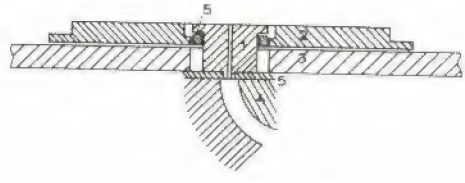



Fig. 3 — Representação bidimensional do analisador de energia

Construiu-se o sistema, usando dois sectores esféricos em Alumínio com $\theta = 90°$ e de diâmetros respectivamente 10 cm e 11 cm, donde resulta $a = b = \sqrt{2}\, r_0$, sendo $r_0 = 5{,}25$ cm. Estas dimensões conduzem à relação teórica entre a tensão de focagem e a energia das partículas:

$$\frac{V_f}{E} = 0{,}191$$

A figura 4 representa por sua vez um pormenor do extractor de partículas que se incluiu na parte inferior da câmara de deposição, entre esta e o analisador de energia.




1- Orifício de extracção
2- Base ou substrato
3- Tampa de topo da câmara de pulverização catódica
4- Analizador de energia
5- Anel isolante

Fig. 4 — Extractor de partículas

O elemento que contém o orifício de extracção, está eléctricamente isolado, quer do analisador de energia, quer do substracto, de modo a permitir a observação do efeito provocado pela variação da sua polarização relativamente ao resto do substrato, o qual funciona ao mesmo potencial do ânodo. De facto, sendo aquele elemento concêntrico com o substrato e ocupando apenas uma pequena parte da área deste, funcionará ele próprio como substrato, sempre que o seu potencial é diferente do potencial do ânodo.

O colector de partículas consiste simplesmente num alvo de aluminio de forma cilíndrica, com uma pequena abertura para entrada das partículas e directamente ligado ao circuito dum electrómetro. A fim de evitar os efeitos da emissão secundária, incluiu-se também um supressor ligado a um potencial negativo de

valor pequeno, de modo a não provocar deflexão dos iões primários.

Duma maneira resumida, o funcionamento do sistema, processa-se da seguinte forma: um feixe de partículas provenientes da descarga, é extraído através do orifício aberto no substrato, entrando no analisador de energia instalado numa câmara onde a pressão se faz suficientemente baixa. As partículas separadas no analisador de energia de acordo com o valor energético pretendido, embatem directamente no alvo do colector de partículas, originando uma corrente, a qual é lida através dum electrómetro.

## 4 — RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Durante o primeiro grupo de experiência, usou-se um orifício de extracção de partículas, de 1,8 mm de diâmetro o que permitiu um ângulo de aceitação de 6,5.° Argon com gás ambiente na câmara de Evaporação por Impacto, variando-se a sua pressão de $40\mu$ a $90\mu$ ($1\mu = 10^{-3}$mmHg), o que levou uma pressão na câmara do analisador de energia de aproximadamente $10^{-5}$Torr, valor considerado suficiente para as experiências levadas a cabo. A tensão entre eléctrodos variou-se de 600 volts a 1.500 volts.

O material escolhido para o alvo foi o cobre. A gama de utilização da tensão de Evaporação por Impacto exige que a tensão de focagem a aplicar ao analisador de energia, se situe dentro dos limites:

$$V_f = 0 \text{ volts}, \; V_f = 0{,}191 \times 1500 \text{ volts}$$

de modo a que se possa varrer todos os valores possíveis da energia das partículas que chegam ao substrato. A tensão a aplicar aos sectores esféricos interior e exterior será:

$$\frac{0{,}191}{2} V_f \text{ Volts}$$

respectivamente de valor positivo e negativo no caso de se pretender sintonizar partículas negativas e de polaridade contrária se se pretender partículas positivas, isto para se conservar sempre a parte central do analisador ao potencial zero.

As curvas da figura 5 mostram a distribuição energética das partículas incidentes no substrato, para uma primeira série de experiências, cujos parâmetros são os seguintes:

— Analisador de energia sintonizado sempre para partículas negativas.

(a) Angulo de aceitação $\gamma = 6{,}5°$
Tensão aplicada aos eléctrodos $V = 1500$ volts
Corrente total de descarga $I_T = 13$ mA
Pressão do gás ambiente $p = 53\mu$
Tensão de polarização do substrato $V_B = 0$ volts

(b)
$\gamma = 6{,}5°$
$V = 1.000$ volts
$I_T = 6$ mA
$p = 53\mu$
$V_B = 0$ volts

(c)
$\gamma = 6{,}5°$
$V = 1.000$ volts
$I_T = 11$ mA
$p = 70\mu$
$V_B = 0$ volts

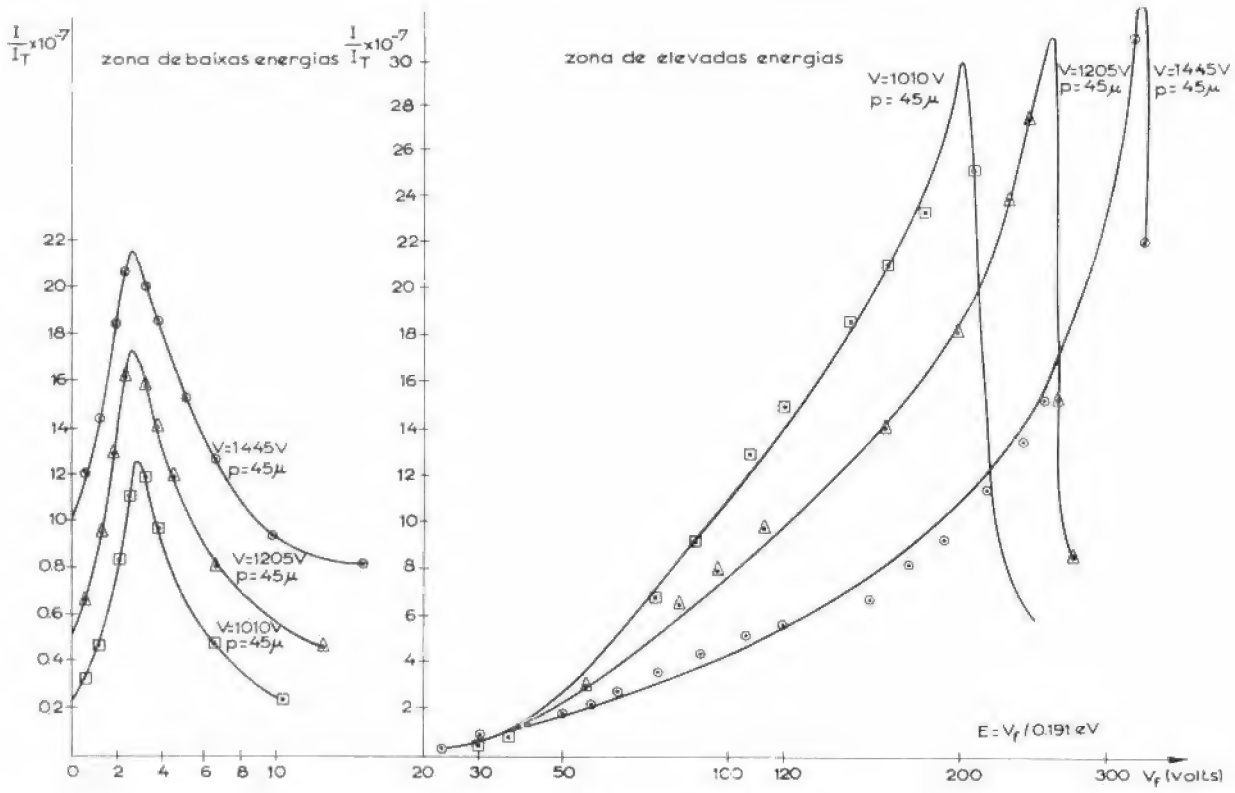



Fig. 5 — Curvas de distribuição de energia

Para se facilitar a representação gráfica, destacaram-se duas regiões correspondentes respectivamente à zona das baixas energias e à zona das elevadas energias, que na realidade correspondem exactamente às duas contribuições importantes dentro de toda a variação, conforme experimentalmente se observou. Em ordenadas fez-se a representação da corrente normalizada, isto é valores da corrente medida através do electrómetro divididos pela corrente total da descarga, usando-se duas escalas diferentes conforme se pode constatar na figura.

## 5 — INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

Da observação das curvas obtidas, pode concluir-se em princípio a existência das seguintes tendências:

a) A distribuição em energia apresenta essencialmente duas contribuições distintas: a relativa à região de baixas energias, com máximos na zona dos 8 a 12 eV estendendo-se numa gama de alguns eV e a relativa à região de elevadas energias, com valores da corrente crescendo até ao máximo valor da tensão aplicada (em equivalentes eV) onde se observa práticamente um corte, qualquer que seja essa tensão aplicada, sendo o corte mais pronunciado à medida que a tensão aplicada aumenta de valor. Tudo indica que nesta região existe um limiar de energia, que determina a existência de partículas chegando ao substracto.

b) A posição dos máximos na zona de baixa energia não varia pronunciadamente quer com a tensão aplicada, quer com a pressão do gás ambiente.

c) A amplitude dos máximos, por sua vez, depende decididamente da pressão reinante, mais pronunciadamente que da tensão aplicada e a extensão em energia coberta pelo ramo descendente da curva, é maior para pressões mais elevadas.

d) O corte observado na região de elevadas energias, depende unicamente da tensão aplicada, no que respeita à sua posição relativamente à energia, mas a amplitude das respectivas curvas, depende efectivamente da pressão do gás ambiente.

e) Quanto mais se aumenta a tensão aplicada, mais os valores achados se concentram junto dos respectivos máximos das curvas, tornando-se o máximo cada vez mais pronunciado pelo lado ascendente das curvas na direcção das energias crescentes. Tudo indica, que nestas condições, o feixe de partículas tende a tornar-se monoenergético, de valor energético igual ao correspondente à tensão aplicada, em equivalentes eV.

Tomando em consideração quer a teoria geral das descargas luminosas em meios gasosos,quer os resultados de determinados autores, conseguidos através de experiências elaboradas em diferentes condições de trabalho, quer ainda a nossa própria experiência, criámos o seguinte modelo para interpretação dos resultados obtidos:

a) O máximo que se situa na parte extrema da região de elevadas energias, representa os electrões que formando um feixe quase monoenergético, atravessam toda a distância que separa o cátodo do ânodo sem sofrerem perdas apreciáveis devidas a colisões. Estes electrões são formados imediatamente junto do cátodo.

b) O espectro de energia intermédio, representa os electrões que tendo sido criados através da descarga, sofrerem bastantes colisões não elásticas.

c) O máximo situado na região de pequenas energias, representa os electrões que emergindo da coluna positiva animados duma pequena energia cinética, são atraídos para o ânodo através do espaço escuro anódico.

Este máximo poderá também ser devido a iões negativos do gás ambiente, ou a iões negativos do metal do alvo (cátodo) ejectados deste como partículas neutras, mas tendo sofrido uma posterior ionização ao atravessarem o meio gasoso ambiente, (ionização por impacto).

A primeira destas hipóteses referentes a iões, é no entanto bastante improvável, porque o gás utilizado (Argon) tem uma área de captura para ionização muito pequena (a área de captura para ionização é definida como o inverso do percurso médio livre).

A segunda das hipóteses poderá todavia ser considerada como válida

A fim de justificar o modelo apresentado, tornemos presente o que acontece no espaço escuro catódico numa descarga luminosa «Self-mantida». Os electrões que atravessam aquela região, são constituídos por dois grupos distintos, ou seja os produzidos junto do cátodo, os quais não sofreram perdas por colisão no espaço escuro, os quais são bastante lentos em virtude das colisões não elásticas que sofrerem. São estes últimos que produzem a zona luminosa negativa e não os do primeiro grupo que permitem explicar a existência dos máximas na zona de elevadas energias, nas respectivas curvas de distribuição energética. Efectivamente, quando a tensão aplicada aumenta, a aceleração dos electrões através do espaço escuro aumenta também de tal modo, que estes tendem cada vez mais a penetrar através do meio gasoso ionizado, aparecendo na região anódica. Este efeito de penetração é devido essencialmente ao facto da área de interacção com o gás ambiente diminuir quando a energia cinética dos electrões aumenta. Para elevadas tensões, os electrões tendem a formar um feixe monoenergético, retendo esta característica para distâncias consideráveis através do meio gasoso. Se o ânodo é colocado a dada distância do cátodo, pode então recolher estes electrões de alta velocidade, os quais possuem uma energia praticamente do mesmo valor que a tensão de descarga, em equivalentes eV. De facto, observando-se por exemplo a figura 5, pode constatar-se que à medida que a tensão de descarga é aumentada, mais as curvas de distribuição de energia se concentram em volta do valor correspondente a essa tensão aplicada, tornando-se o corte também pronunciado.

## 6 — IMPLICAÇÕES E CONCLUSÕES

Os resultados encontrados relativos à distribuição energética de partículas negativas e nomeadamente a existência dos máximos na região das elevadas energias, que confirmámos serem fundamentalmente devidos a electrões, têm imediatas e interessantes consequências de grande importância, tanto na interpretação dos processos de nucleação de películas finas usando o método citado, como no conhecimento das características das descargas luminosas em meios gasosos. Assim, tomando os dados publicados recentemente por vários autores, fixando que o uso da evaporação por impacto implicava na primeira fase do crescimento das películas, uma densidade de ilhas superior à encontrada para o processo de evaporação térmica no vácuo e uma maior facilidade de crescimento epitaxial do depósito factos para os quais não foi dada explicação plausível, vemos que vêm precisamente ao encontro dos resultados que conseguimos. Na realidade, a existência de feixes de electrões de elevada energia a bombardearem o substrato durante o crescimento da película, terá como primeira consequência, a criação de pontos especiais de nucleação, aumentando desta forma a densidade inicial de ilhas e portanto o valor da densidade de saturação de ilhas, definida como o valor a partir do qual o número de ilhas deixa de aumentar para dar lugar à fase de coalescência (ver Lewis & Campbell[6]).

A elevada energia com que os electrões embatem no substrato, implica a alteração da superfície deste, provavelmente provocando através interação daquelas partículas com o substrato, defeitos pontuais na superfície, por dissociação desta, ou obrigando os átomos do substrato a afastarem-se das suas posições normais de equilíbrio na estrutura. Em qualquer dos casos, pontos especiais de nucleação serão formados, para os quais a energia de absorção é maior que a relativa a um ponto de absorção normal. O número de defeitos superficiais será governado pelo equilíbrio estabelecido entre as gamas de produção e de perda, sendo esta última dependente da temperatura.

Confirmando estas hipóteses, podemos referir os trabalhos de Stirland e Palmberg . Stirland, idealizou um sistema para deposição de ouro sobre cloreto de sódio, usando evaporação térmica no vácuo, o qual incluia um substrato composto por duas partes colocadas lado a lado, mas de tal modo que uma delas pudesse ser bombardeada por um feixe de electrões durante qualquer fase da deposição. Assim, todos os factores intervenientes no processo seriam iguais para as duas partes do substrato, excepto que uma teria a possibilidade de ficar submetida a bombardeamento electrónico.

Os resultados obtidos, mostraram que a presença de electrões durante a formação da película, influenciava quer o processo de nucleação e crescimento desta, quer o seu crescimento epitaxial, mostrando ainda que um depósito bombardeado, se apresente mais contínuo, após conveniente duração da experiência.

Hill encontrou efeitos similares, ao depositar ouro sobre substratos de vidro, na presença de electrões incidentes. Por sua vez, Palmberg através de experiências semelhantes às de Stirland, comprovou experimentalmente que a presença de electrões durante a formação do depósito, induzia o seu crescimento epitaxial A este respeito, está ainda por esclarecer se o bombardeamento electrónico produz o crescimento epitaxial através dum mecanismo que melhore a orientação dos núcleos, ou através dum mecanismo que aumente a densidade dos núcleos reponsáveis pelo crescimento epitaxial, cuja coalescência com núcleos não orientados, produza uma recristalização destes.

Em resumo, sendo aparente que o bombardeamento electrónico aumenta a densidade inicial de «ilhas» ou núcleos estáveis, não está ainda decidido se esta condição ou outra são suficientes para explicar as diferenças no crescimento epitaxial. Acrescente-se que Layton encontrou efeitos similares com iões positivos a bombardearem películas finais de ouro.

No que respeita às implicações dos nossos resultados nas características das descargas luminosas em meios gasosos, pretendemos apenas focar que a existência de electrões de elevada energia junto do ânodo, envolve um percurso livre médio bastante grande para aquelas partículas, o que por sua vez obriga a que a área de colisão (elástica e não elástica)neste caso relativa ao Argon, tenha uma variação em função da energia dos electrões que atravessam aquele meio um pouco diferente da que nos tem sido dado apreciar através dos dados existentes, diminuindo muito rapidamente quando a energia dos electrões aumenta, a partir de certo valor, mas seguindo no entanto a mesma forma de variação já exposta anteriormente.

Como observação final, registe-se que no seu aspecto geral, os estudos teóricos relativos ao fenómeno da pulverização catódica estão ainda numa fase praticamente elementar, pois se a influência de alguns parâmetros está amplamente conhecida, o desconhecimento de outros não permite um completo domínio dos fenómenos em jogo.

Os resultados relativos a partículas positivas mostraram-se de consequências menos interessantes e simultâneamente de mais difícil obtenção, pois as correntes em jogo são de valor bastante inferior às relativas a energias negativas. Estes resultados, farão parte duma futura exposição, em que se apreciará também os efeitos devidos a partículas neutras. Actualmente, o nosso principal foco de interesse, concentra-se no estudo das características de resistividade de películas finais submetidas a bombardeamento electrónico durante a deposição.

BIBLIOGRAFIA

[1] Layton e Campbell (1966). Journal of Mat. Science 1, 367-376

[2] D. J. Stirland (1966) Electron Bombardment —Induced Charges in the growth and Epitaxy of Evaporated Gold Films. Applied Phys. Letters, Vol 8, n.° 12

[3] L. Guimarães (Nov. 1972). Películas Finas. Tese de doutoramento em Engenharia Electrotécnica.

[4] J. Coburn 1970). The Review of Scientific Instr. Vol 41, n.° 8.

[5] E. M. Purcell. Physical Revue. Vol 54

[6] Lewis e Campbell (1967) J. Vac. Science Technology 4,5,209

[7] R. M. Hill, reported by J. R. Balner (1965)

[7] R. M. Hill, reported by J. R. Balner (1965) — Nature, 207, 26.

# Feiras, Conferências, Exposições e Congressos

| OBJECTIVOS E PROGRAMA | LOCAL, DATA, ORGANIZÇÕES E INFORAMAÇÕES |
|---|---|
| Mecanelem Salão da Fundição | Paris<br>7 a 12 de Abril - 75 |
| Feira de Lille | Lille<br>11 a 21 de Abril - 75 |
| Feira Internacional de Milão | Milão<br>14 a 25 de Abril - 75 |
| Conference Nucleaire Europeenne | Paris<br>(Organizada pela Sociedade Europa de Energia Nuclear com a colaboração da Sociedade Nuclear Amaricana)<br>Abril - 75 |
| Exposição Internacional de metal e seus derivados | Londres<br>Abril - 75 |
| Foire Internacional de Machines et Materiaux d'Embales | Düsseldorf 9 a 15 — Maio - 75<br>Interpack 75 |
| Congresso Internacional sobre Srtuctural Questions of Underground Railwais<br>Secretariado:<br>Kospek distudamanyi<br>Egyesület, 1655,<br>Budapest<br>Kossuty Lajos ter 6-8<br>Hungray | Hungray<br>Scientific soc for transports 12 a 25 Maio<br>Bulatou fured |
| Exposição Internacional de Eletrónica | Londres<br>13 a 16 de Maio - 75 |

# "El estaño y sus aplicaciones" n.º 101

## LA TIPOGRAFÍA MODERNA SOBRE ESTAÑO

Una de las numerosas características que han contribuído a que la hojalata sea un material primordial de embalaje es su idoneidad como superficie tipográfica, permitiendo la obtención de ilustraciones brillantes, con reproducción fiel y precisión de detalles. Además de su empleo en envases para alimentos, la hojalata impresa encuentra aplicación en los artículos denominados de «uso general» tales como cajas decorativas para galletas y bombonería, papeleras y bandejas así como cajas herméticas para baterías. El impresor de trabajos por encargo ha de ocuparse de todas estas aplicaciones y en un artículo del último número de «El Estaño y sus Aplicaciones» se describen las actividades del principal impresor de hojalata de Inglaterra. Se bosquejan los fundamentos de la tipografía sobre hojalata y las innovaciones tales como los métodos electrónicos del tratamiento de trabajos artísticos y los procesos tipográficos a tres colores. Estos adelantos en la tecnología tipográfica, junto con las propiedades intrínsecas del metal, mantienen en vanguardia a los productos de hojalata para el embalaje y otras aplicaciones.

## EQUIPOS DE DESTILACIÓN CON REVESTIMIENTO DE ESTAÑO

En muchas aplicaciones, tanto médicas como industriales, existe la necesidad de agua de elevada pureza. Una de las formas más eficaces de conseguirla es mediante destilación pero los materiales de construcción han de ser de tal tipo que no contaminen el agua. El estaño ha demostrado su superioridad en coste, duración y no toxicidad con respecto a otros materiales competitivos en dicha aplicación. En «El Estaño y sus Aplicaciones» n.º 101, un directivo de un importante fabricante de equipos de destilación, con revestimiento de estaño, describe la fabricación de alambiques y de otros equipos y el papel vital desempeñado por el estaño.

## LOS PRODUCTOS QUÍMICOS DE ORGANOESTAÑO EN LA INDUSTRIA DE PLÁSTICOS

Los compuestos de diorganoestaño en los cuales el átomo de estaño se encuentra directamente enlazado con dos átomos de carbono, tienen cierto número de aplicaciones importantes en determinados plásticos de forma que su desarrollo va unido al de la industria de plásticos. En un artículo del presente número se describen recientes progresos tecnológicos, tanto en los compuestos de diorganoestaño como en determinados plásticos. Los estabilizadores de organoestaño son los de mayor eficacia conocida para mantener la transparencia y resistencia a los golpes del CPV durante su elaboración y posterior servicio. Se reseñan los adelantos alcanzados con estos estabilizadores, incluyendo el desarrollo de los tipos con «mezcla de metal» en los cuales los compuestos de organoestaño se combinan con sales de bario o calcio y los nuevos estabilizadores de dimetilestaño que, según se reivindica, son estabilizadores térmicos de gran eficacia. Los adelantos que se describen en la tecnología de los plásticos comprenden el CPV en aplicaciones de construcción; las espumas de poliuretano catalizadas con organoestaño para uso en mobiliario y suelos sin uniones; y la producción de zapatos con empleo de moldes de silicona, que se vulcanizan a temperatura ambiente por medio de la adición de un agente secante de organoestaño.

Este último número de «El Estaño y sus Aplicaciones» contiene asimismo un informe sobre el 500 Aniversario de la Worshipful Company of Pewterers, noticias del Instituto, incluyendo la inauguración oficial en Sydney, Nueva Gales del Sur, del Australian Tin Information Centre, noticias sobre próximas reuniones, críticas de libros y resumen de recientes publicaciones del Instituto.

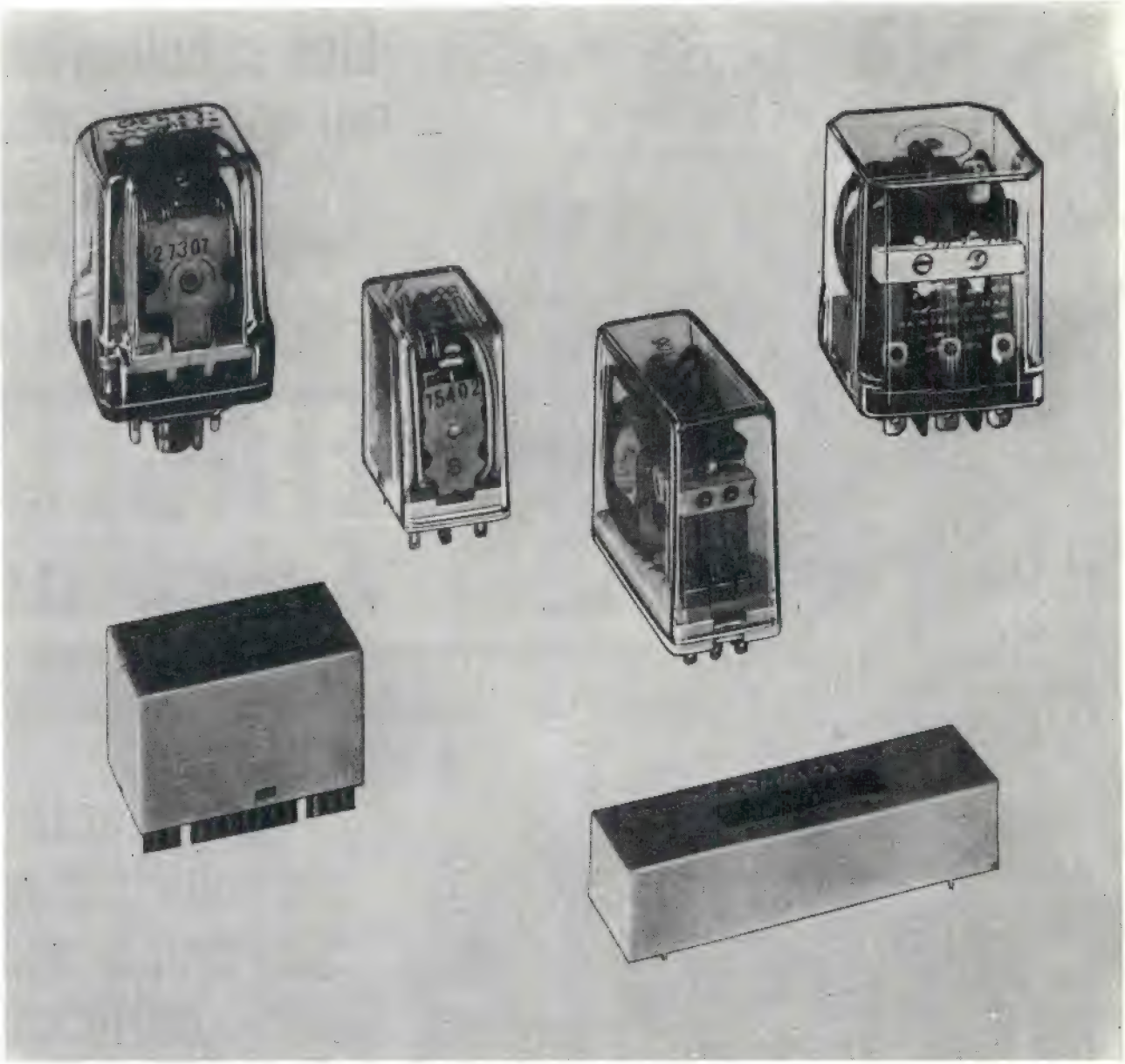
# Eles escolheram um apartamento num prédio equipado com elevadores EFACEC *Selectivos*

**UMA COMODIDADE PARA TODA A VIDA**

**factor de valorização dos modernos edifícios residenciais**

# EFACEC

**A maior organização do país no ramo electrotécnico**




# RELÉS DE COMANDO
# CC E AC

**DE 1·2·4·5 e 10 A**
**COM 1·2·3·4 e 6 CONTACTOS**

**SCHRACK**

*ELECTROTÉCNICOS REUNIDOS Lda.*
*av. duque de ávila, 66-3º lisboa portugal*

# Dispersão de poluentes na atmosfera

Em Setembro de 1972, o Núcleo de Estudos de Engenharia Mecânica (I. A. C. ) e a Divisão de Termodinâmica Aplicada (I. S. T.) organizaram no I. S. T. um Curso de Extensão Universitária sobre a Dispersão de Poluentes na Atmosfera. A lição inaugural desse curso foi já publicada dados os aspectos muito gerais e pouco especializados nelas tratados. Segue-se agora o texto das lições proferidas pelo Prof. J. Mathieu. Estas lições formam, em si mesmo, um todo coerente e correspondem a uma contribuição original e significativa para o estudo da difusão na camada limite atmosférica.

Posteriormente serão publicadas as lições sobre «Camada Limite Atmosférica» e «Métodos Numéricos de Previsão». A primeira destina-se apenas a introduzir os conceitos fundamentais associados à camada limite atmosférica nos aspectos em que diferem da habitual camada limite hidrodinâmica. As outras tem como finalidade uma mais ampla divulgação do trabalho de investigação realizado no Núcleo de Estudos de Engenharia Mecânica relativamente aos métodos numéricos de integração das equações fundamentais. Espera-se deste modo que o conjunto de publicações que agora se inicia e que constituem o prolongamento natural de anteriores trabalhos sobre «Modelos de Turbulência e sua Verificação Experimetal» também publicados pela Técinca, formem uma base sólida e cientificamente evoluida para a análise dos problemas postos pela dispersão de poluentes.

É numa óptica científica que desejariamos ver tratados os problemas de poluiçao que assumem entre nós aspectos bem mais alarmantes do que por vezes se supõe sem apresentarem contudo as catrastóficas implicações que certa imprensa insiste em nos divulgar e algumas actividades gostam de canalizar em benefício próprio.

Abrindo as suas páginas a trabalhos de índole científica sobre poluição e fomentando o interesse pelo tema, a TÉCNICA presta um serviço relativo que muito nos apraz registar e a que procuramos corresponder com as publicações que se seguem.

J. J. Delgado Domingos

C. D. U. 533.15:551.554:628.52

# Diffusion dans les couches limites stratifiées

J. MATHIEU

RESUMO

*Estuda-se a estrutura das baixas camadas da atmosfera usando uma atmosfera padrão em referência à qual é analisado o escoamento real sob a forma de uma perturbação.*

*Estabelecem-se os perfis de velocidade e temperatura médias na camada limite atmosférica para várias condições de estabilidade.*

*Faz-se o estudo da difusão turbulenta pela analogia molecular e pela teoria estatística sendo analisadas as dificulades decorrentes da não linearidade do fenómeno. Mostra-se como uma perturbação térmica pode*

ABSTRACT

*The structure of the atmospheric boundary layer is studied by means of a «deviation flow» from the standard atmosphere.*

*Mean velocity and temperature profiles are stablished for several stability conditions.*

*Turbulent diffusion is studied both through a gradient transport approach and through a statistical theory. Difficulties due to the non linearity of the phenomena are analysed. It is shown how a destabilizing thermal action can speed up turbulent diffusion.*

*Measurements in wind tunnel and its limitations*

*acelerar o processo da difusão turbulenta ou pode bloquea-lo consoante o tipo de estabilidade da atmosfera.*

*Referem-se os ensaios efectuados em túnel aerodinâmico, as limitações e vantagens em relação às medidas «in situ». As dificuldades de transposição dos resultados do túnel para a atmosfera são devidas em primeiro lugar à pequenez das escalas de tempo e comprimento no túnel e à dificuldade em simular regimens com instabilidade significativa.*

*Apresentam-se vias para melhorar estes aspectos.*

*A comodidade e economia das medições feitas em túnel justificam a sua utilização e desenvolvimento mesmo que sejam aplicadas apenas para o estudo de tendências ou efeitos globais.*

*and advantages are compared with «in situ» measurements. Difficulties in transposig the wind tunnel measurements to full scale are mainly due to the small wind tunnel time and length scales and to the difficulty of simulating fairly unstable flows. Several ways of improving the measurements are presented.*

*Economy and convenience of wind tunnel measurements justify its utilization and development even if our purpose is to seek tendencies or global effects.*

## CHAPITRE I

### *Structure de la basse atmosphere*

Nous consacrerons l'ensemble de ce chapître à l'étude de la structure des basses couches de l'atmosphère. Référence sera alors faite à une atmosphère type. Les déviations par rapport à ce modèle idéal seront ensuite analysées. Pour des raisons de simple commodité cet «écoulement de déviation» sera décomposé en écoulement moyen et en écoulement turbulent. Afin de donner les équations contrôlant l'évolution de chacun de ces mouvements élémentaires nous établirons d'abord les équations instantanées du mouvement de déviation.

#### 1.1 *Equations instantanées du mouvement de déviation*

Les équations du mouvement d'un fluide visqueux compressible soumis à l'action de la pesanteur sont:

— l'équation de quantité de mouvement:

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{-\left(P + \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)\delta_{ik} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right\} - \rho g \delta_{3i}$$

— l'équation de conservation de la masse:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = 0$$

— l'équation d'énergie prise ici sous la forme d'une équation d'évolution de l'entropie:

$$\rho T\left(\frac{\partial S}{\partial t} + u_j \frac{\partial S}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\left\{-\frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\delta_{ik} + \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}\right)$$

On voit qu'au cours du mouvement l'entropie de la particule fluide est accrue du fait des processus dissipatifs et altérée par les échanges thermiques, accroissement et altération restant pondérés par le facteur 1/T.

— l'équation d'état. On supposera que l'atmosphère est constitués par un gaz parfait de composition constante obéissant à la loi:

$$\frac{P}{\rho} = R\,T$$

Quelque soit l'état de l'atmosphère nous ferons les hypothèses simplificatrices suivantes:

a) les vitesses sont faibles devant la vitesse du son,

b) les variations de pression, masse volumique et température demeurent relativement faibles en ce sens que les écarts de ces quantités par rapport à un état standard à définir demeurent petites comparées aux quantités elles-mêmes,

c) à une hauteur donnée, les fluctuations de pression sont sans influence sur la densité, le gaz adoptant la pression relative à cette altitude,

d) les variations de $\lambda$ et $\mu$ avec la température peuvent être négligées.

Puisque nous venons d'introduire la notion d'écart vis-à-vis d'un modèle standart il convient tout d'abord d'en définir les propriétés. L'atmosphère standard est au repos et vérifie les relations suivantes faciles à déduire du groupe précédent dont se trouve évidement exclue l'équation de continuité.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial P_0}{\partial x_i} + g\delta_{3i} = 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial P_0}{\partial z} - g = 0 \\ \dfrac{P_0}{\rho_0} = R\,T_0 \end{cases}$$

Nous écrirons encore la variation d'entropie:

$$dS = \frac{C_p}{RT} P\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{C_v}{RT}\frac{1}{\rho}\, dP$$

et puisque $\frac{1}{\rho} = R\frac{T}{P}$ et que $d\left(\frac{1}{\rho}\right) = R\frac{dT}{P} - \frac{RT}{P}\frac{dP}{P}$

$$dS = C_p \frac{dT}{T} - R\frac{dP}{P}$$

Dans le cas du modèle standard nous la supposerons nulle ce qui en liant les variations relatives de P à celles de T fixe définitivement le modèle

$$C_p \frac{dT_o}{T_o} = R\frac{dP_o}{P_o}$$

Dans ces conditions le champ thermique vertical sera défini par

$$\frac{\partial T_o}{\partial z} = \frac{RT_o}{C_p P_o}\frac{\partial P_o}{\partial z} = -\frac{g}{C_p}$$

et l'on pourra écrire une relation semblable à celle donnée pour la pression

$$\left\{ \frac{\partial T_o}{\partial x_i} + \frac{g}{C_p}\delta_{3i} \Rightarrow \frac{\partial T_o}{\partial z} + \frac{g}{C_p} = 0 \right.$$

L'état de l'atmosphère réel sera repéré par rapport à cet atmosphère standard si bien que l'on écrira:

$$P = P_o + P' \;;\; T = T_o + T' \;;\; \rho = \rho_o + \rho'$$

On supposera cependant que les écarts P', T' et p' demeurent faibles

$$P' \ll P_o \;;\; T' \ll T_o \;;\; \rho' \ll \rho_o$$

Puisque les variations de masse volumique dues aux variations de pression sont négligées on aura:

$$\left\{ \frac{\rho'}{\rho_o} = -\frac{T'}{T_o} \right.$$

(ε)

Quant à l'équation de conservation de la masse on voit en la développant qu'elle se met sous la forme

$$\frac{\partial(\rho_o+\rho')}{\partial t} + (\rho_o+\rho')\frac{\partial U_j}{\partial x_j} + U_j\frac{\partial(\rho_o+\rho')}{\partial x_j} = 0$$

Compte tenu de la permanence dans le temps de l'atmosphère standard et des variations spatiales relativement modérées de $\rho_o$ elle se réduit finalement à

$$\left\{ \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \right.$$

L'équation de quantité de mouvement prend dans ces conditions la forme simple:

$$\rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} - \rho g\,\delta_{3i}$$

Mais:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho_o\left(1+\frac{\rho'}{\rho_o}\right)}\left(\frac{\partial P_o}{\partial x_i} + \frac{\partial P'}{\partial x_i}\right) \simeq \frac{1}{\rho_o}\frac{\partial P_o}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_o}\frac{\partial P'}{\partial x_i} - \frac{\rho'}{\rho_o^2}\frac{\partial P_o}{\partial x_i}$$

Dans l'atmosphère standard $\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial P_o}{\partial x_i}$ s'exprime en fonction de g et $\rho'/\rho_o$ est égal à $\frac{T'}{T_o}$ on a donc:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} = -g\,\delta_{3i} + \frac{1}{\rho_o}\frac{\partial P'}{\partial x_i} - \frac{T'}{T_o}g\,\delta_{3i}$$

L'équation de quantité de mouvement s'écrit

$$\left\{ \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial P'}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} + g\frac{T'}{T_o}\delta_{3i} \right.$$

forme que nous utiliserons par la suite.

En ce qui concerne l'équation d'énergie nous reviendrons à une formulation en T à partir de la relation précédement rappelée:

$$dS = C_p\frac{dT}{T} - R\frac{dP}{P}$$

---

* Il faut noter que pour conserver l'homogénéité rigoureuse dans les notations les composantes de la vitesse devraient être notées $U'_i$.

Ainsi se retrouvera mis en évidence le travail des forces de pression et l'on aura, compte tenu des simplifications introduites et en négligeant la chaleur dégagée par frottement:

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial P}{\partial t} + U_j \frac{\partial P}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2}$$

Nous écrirons alors l'équation d'énergie pour les déviations $T'$, $\rho'$, $P'$ comptées par rapport au modèle standard. Dans ce dernier les gradients de température seront supposés suffisamment faibles pour que leur influence sur les échanges soit négligée, il vient alors:

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + U_j \frac{\partial T_0}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial T'}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho_0 c_p} U_j \frac{\partial P_0}{\partial x_j} = \alpha \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j^2}$$

où $\alpha$ est la diffusivité thermique: $\alpha = \lambda / \rho c_p$. Il n'est évidemment pas exclus de rencontrer localement dans l'atmosphère réelle des gradients thermiques importants entraînant des échanges considérables du fait du champ de déviation.

Eu égard aux conditions de définition de l'atmosphère standard

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_0}{\partial x_i} + g\,\delta_{3i} = 0 ; \quad \frac{\partial T_0}{\partial x_i} + \frac{g}{c_p}\,\delta_{3i} = 0$$

l'équation d'énergie pour la déviation $T'$ ne retient qu'un double phénomène de diffusion convection associés et s'écrit:

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + u_j \frac{\partial T'}{\partial x_j} = \alpha \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j^2}$$

*Remarque:*

Il peut être fait usage d'une température potentiele définie de la façon suivante:

$$dS = c_p \frac{dT}{T} - R P \frac{dP}{P} = c_p \frac{d\Theta}{\Theta}$$

Ainsi

$$\Theta \sim \frac{T}{P^{R/c_p}}$$

Dans le cas du modèle standard $P_0$, $\rho_0$, $T_0$ on a puisque

$$dS = 0 \qquad d\Theta = 0$$

Une atmosphère ayant le profil de cette atmosphère standard est dynamiquement stable, un volume fluide se déplaçant vers le haut ou vers le bas a toujours la densité locale variations de température et de pression se combinat de telle façon que $\partial\Theta/\partial z = 0$. La variation de $T_0$ en fonction de la hauteur est liée au fait qu'un volume de fluide se déplaçant verticalement est soumis à un refroidissement adiabatique dû à l'évolution de la pression. Pour un écoulement faiblement destabilisé les variations d'entropie du mouvement de déviation seront donc liées à celles définies à partir de la température potentielle $\Theta$

$$\frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \sim \frac{1}{T'} \frac{\partial T'}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial \Theta}{\partial z} \sim \frac{\partial T'}{\partial z}$$

1.2 *Equations du mouvement moyen de déviation*

Le mouvement de déviation était défini à partir du mouvement réel dans l'atmosphère en prenant comme référence un modèle standard que nous avons défini et qui correspond à un système dynamiquement stable. Nous supposerons sans discussion qu'il est possible de définir pour ce mouvement de déviation des valeurs moyennes

$$\overline{U_i} \;,\; \overline{T'} \;,\; \overline{P'}$$

et des valeurs fluctuantes

$$u_i \;,\; \theta \;,\; p$$

si bien que l'on retrouve les liaisons traditionnelles entre grandeurs instantanées, moyennes et fluctuantes

$$U_i = \overline{U_i} + u_i$$
$$T' = \overline{T'} + \theta$$
$$P' = \overline{P'} + p$$

En supposant que les équations instantanées du mouvement de déviation soient vérifiées même lorsque celui-ci présente un caractère turbulent on a en prenant les moyennes et compte tenu de quelques arrangements classiques:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{U_i}}{\partial t} + U_j \dfrac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\dfrac{1}{\rho_0} \dfrac{\partial \overline{P'}}{\partial x_i} + \nu \dfrac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_j^2} + \dfrac{g}{T_0} \overline{T'} \delta_{i3} \\[2ex] \dfrac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_j} = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \frac{\partial \overline{T'}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j \theta}}{\partial x_j} = \alpha \frac{\partial^2 \overline{T'}}{\partial x_j^2} \right.$$

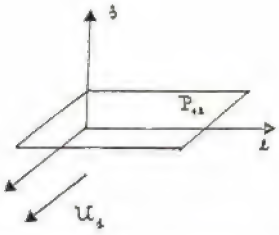
La double nature des contraintes laminaire et turbulento peut être prise en compte par un tenseur unique du second ordre groupant éventuellement les actions normales ou de pression:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ P' \delta_{ij} - \rho_0 \overline{u_i u_j} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{U}_i \right\} = \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}$$

Le tenseur prenant en compte la participation du mouvement turbulent aux actions de contact — $\rho_0 u_i u_j$ est généralement appelé tenseur de Reynolds.

Le double caractère des échanges thermiques donne lieu à un regroupement analogue si l'on introduit le vecteur de composants $H_j$ tel que

$$H_j = -\lambda \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_j} + \rho_0 C_p \overline{u_j \theta}$$




Nous préciserons certains aspects du problème en considérant un écoulement permanent dont l'unique composante de la vitesse moyenne est $U_1$, les proprietés demeurant homogènes dans le plan $x_1$ $x_2$. On a alors:

$$U_i = V(x_3)\delta_{1i}$$

Les équations de quantité de mouvement et d'énergie peuvent s'écrire de la manière suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(\overline{u_i u_3}) = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \overline{P'}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}\delta_{1i} + g\frac{\overline{T'}}{T_0}\delta_{i3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(\overline{\theta u_3}) = \alpha \frac{\partial^2 \overline{T'}}{\partial x_3^2}$$

soit en faisant successivement i = 1, 2, 3:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(\overline{u_1 u_3}) = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \overline{P'}}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_3}\left\{\overline{u_1 u_3} - \nu \frac{\partial V}{\partial x_3}\right\} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \overline{P'}}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(\overline{u_2 u_3}) = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \overline{P'}}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\overline{u_3^2} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \overline{P'}}{\partial x_3} + g\frac{\overline{T'}}{T_0} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_3}\left\{\overline{u_3^2} + \frac{P'}{\rho_0}\right\} = g\frac{\overline{T'}}{T_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(\overline{u_3 \theta}) = \alpha \frac{\partial^2 \overline{T'}}{\partial x_3^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_3}\left\{\overline{u_3 \theta} - \alpha \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_3}\right\} = 0$$

Introduisons la double notation

$$-\rho_0 \overline{u_1 u_3} + \mu \frac{\partial V}{\partial x_3} = \tau_{13}$$

$$-\rho_0 C_p \overline{u_3 \theta} + \lambda \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_3} = H_3$$

et considérons le développement d'une couche limite le long d'une paroi plane. Si l'on postule l'existence d'une zone à contrainte tangentielle et flux constant, on a d'une part

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\tau_{13} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau_{13}}{\rho_0} = \frac{\tau_p}{\rho_0} = U_f^2 = cste$$

$U_f$ désignant la vitesse de frottement,

et d'autre part:

$$\frac{\partial H_3}{\partial x_3} = 0 \quad \Rightarrow H_3 = \rho_0 C_p U_f T_f = cste$$

$T_f$ désignant la température de frottement:

$$T_f = \frac{H_3}{\rho_0 C_p U_f} = \frac{H_p}{\rho_0 C_p U_f}$$

La température de frottement rapporte comme on le voit le flux thermique à un flux convectif dont la vitesse caractéristique serait précisément la vitesse de frottement

### 1.3 *Equations du mouvement fluctuant de déviation*

Les équations du mouvement instantané peuvent être écrites en tenant compte pour le mouvement de déviation de la décomposition adoptée entre grandeurs moyennes et grandeurs fluctuantes, si de ces relations on soustrait les équations du mouvement moyen déjà établies on met alors en évidence l'histoire des différents paramètres turbulents du système. C'est ainsi que l'on a en désignant par «k» l'indice de sommation

$$(1) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \overline{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}}$$

$$= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{g}{T_0}\theta \delta_{3i}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_k \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_k} + \overline{U}_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} - \overline{u_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k^2}$$

Examinons tout d'abord le bilan d'énergie mécanique. Il est commode d'opérer de façon classique en passant par l'intermédiaire de l'équation des contraintes. Nous considérons l'équation (1) et son homologue obtenu en permutant les indices i et j

$$(2)\quad \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} + \bar{U}_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \overline{u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}$$

$$= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2} + \frac{g}{T_0}\theta\delta_{3j}$$

Ces équations sont alors multipliées par $u_i$ et $u_j$ respectivement puis ajoutées, on a après avoir une moyenne sur une série d'épreuves et compte tenu de quelquer réarrangements:

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = -\left[\overline{u_j u_k}\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k}\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k}\right]$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u_i u_j u_k}\right) - \frac{1}{\rho_0}\left[\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}}\right]$$

$$+\nu\left[\overline{u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}} + \overline{u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2}}\right] + \frac{g}{T_0}\left[\overline{\theta u_j}\delta_{3i} + \overline{\theta u_i}\delta_{3j}\right]$$

La corrélation $\overline{u_i u_j}$ d'une structure turbulente que l'on suppose suivre le mouvement moyen est affectée:

— par le mouvement moyen lui-même, le terme

$$\overline{u_j u_k}\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k}\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k}$$

prenant en charge ce couplage,

— par le champ turbulent agissant sur son propre développement*,

— par la viscosité dont le double rôle sera rappelé par la suite,

— par le champ thermique associé.

Il est facile de procéder à un bilan énergétique portant cette fois sur le mouvement fluctuant, faisons dans l'expression précédente i = j et sommons i, on aura en possant

$$q^2 = \frac{1}{2}\left[u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right] = \frac{1}{2}\sum_i u_i^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{q^2} + \bar{U}_k \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{q^2} = -\overline{u_i u_k}\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_k q^2}$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\overline{p u_i}\right] + \nu\,\overline{u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}} + \frac{g}{T_0}\overline{\theta u_i}\,\delta_{3i}$$

Le rôle de chacun des termes est facile à comprendre eu égard aux commentaires donnés pour l'équation des corrélations. Toutefois, pour mieux saisir le rôle de la viscosité, il y aurait lieu d'appliquer cette relation à un certain domaine fluide, on comprendrait alors l'intérêt de distinguer ce qui se passe à la frontière de ce domaine et en tout point interne. Ceci reviendrait à mettre en évidence l'opérateur divergence dans l'expression $\nu\,\overline{u_i \partial^2 u_i / \partial x_k^2}$. On écrirait alors:

$$\nu\,\overline{u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}} \equiv \underbrace{\nu \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\left[\frac{1}{2}\overline{u_i^2} + \nu\,\overline{\frac{\partial^2 u_i u_k}{\partial x_i \partial x_k}}\right]}_{\text{1er groupe}}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2}\nu\,\overline{\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right]^2}}_{\text{2ème groupe}}$$

Le 1er groupe de termes rend compte du transfert d'énergie par viscosité. Celle-ci joue un rôle tout à fait analogue à celui rencontré dans les équations du tourbillon où le rotationnel se trouve diffusé par l'intermédiaire de $\nu$. Ce moyen de «porter» en tout point du fluide une information qui se trouve être dans les équations d'Helmoltz le rotationnel et qui est ici l'énergie cinétique turbulente $\overline{q^2}$ est dans le cas d'un mouvement turbulent particulièrement peu efficace comparé à celui qui résulte de l'agitation même du fluide; par la suite, cette action visqueuse sera négligée. Le second groupe rend compte du rôle dissipatif de la viscosité qui lui se manifeste en tout point du volume. Ce rôle est fondamental, une distribution plus ou moins continue de puits d'énergie s'organise dans le domaine particulièrement alimenté par les petites structures; on sait que ce taux d'énergie à dissiper est fixé par ailleurs, assurément par une classe de tourbillons assez étroitement corrélés au champ moyen qui assure efficacement les premiers stades de leur développement**.

Parallèlement à ce qui a été fait pour l'énergie cinétique, nous écrirons maitenant l'équation donnant l'évolution du carré moyen des fluctuations de température. Nous avons précisé au début du paragraphe le groupe des relations de base. La dernière étant multipliée par $\theta$, et une moyenne effectuée on trouve en posant:

* Mis sous la forme $u_k \dfrac{\partial u_i u_j}{\partial x_k}$ on voit mieux l'aspect convectif de ce terme le mouvement turbulent se véhiculant lui-même.

** Ceci laisserait à penser que les axes des trourbillons qui prélèvent l'énergie de l'écoulement moyen sont par exemple dirigés suivant l'axe principal de la quadrique de déformation qui assure au mieux leur croissance, l'axe de dilatation par conséquent.

$$\frac{\theta^2}{2} = \eta$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\eta} + \overline{U}_k \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{\eta} = -\overline{\theta u_k}\frac{\partial \overline{T}'}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_k \eta} + \alpha\,\overline{\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k^2}}$$

Cette équation est à comparer à celle obtenue pour $\overline{q}^2$. L'énergie thermique en suivant le mouvement moyen est affectée:

— par l'inhomogénéité spaciale du champ de déviation; le terme que l'on peut interpréter comme une production

$$-\overline{\theta u_k}\,\frac{\partial \overline{T}'}{\partial x_k}$$

prend en charge le couplage entre champ thermique moyen et champ turbulent,

— par le champ turbulent agissant sur son propre développement:

$$-\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_k \eta}$$

— par la conductibilité thermique. Le terme $\lambda\,\overline{\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k^2}}$

qui la prend en charge est souvent supposé peu différent du terme essentiellement négatif

$-\lambda\overline{\left(\partial\theta/\partial x_k\right)^2}$ ce qui revient à négliger le

terme $\lambda \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{\left(\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_k}\right)^2}$ c'est-à-dire à supposer la turbulence thermique homogène du point de vue de la conduction.

Si

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_k}}\right) = \lambda\,\overline{\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k^2}} + \lambda\overline{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_k}\right)^2} = 0$$

on a bien en effet

$$\lambda\,\overline{\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k^2}} = -\lambda\overline{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_k}\right)^2}$$

*Remarques*

1.°) Dans cette équation la pression ne figure d'aucune manière ce qui se conçoit si l'on tient compte de son rôle répartiteur que nous préciserons par la suite et du caractère scalaire de la grandeur traitée*

2.°) Nous avons interprété le terme $-\overline{\theta u_k}\,\frac{\partial \overline{T}'}{\partial x_k}$ comme une production d'énergie turbulente. Pour s'en assurer il conviendrait de procéder comme on a coutume de le faire lorsque l'on cherche à donner un sens au terme $\overline{u_i u_k}\,\partial \overline{U}_i/\partial x_k$ c'est-à-dire en examinant l'équation d'évolution des températures moyennes du champ de déviation:

$$\frac{\partial \overline{T}'}{\partial t} + \overline{U}_k \frac{\partial \overline{T}'}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\alpha \frac{\partial \overline{T}'}{\partial x_k} - \overline{\theta u_k}\right] = -\frac{1}{\rho_0 C_p}\frac{\partial H_k}{\partial x_k}$$

avec toujours

$$H_k = -\lambda \frac{\partial \overline{T}'}{\partial x_k} + \rho_0 C_p\,\overline{\theta u_k}$$

En effet multiplions cette équation par $\overline{T}'$, elle devient:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\overline{T}'^2 + \overline{U}_k \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{2}\overline{T}'^2 = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\overline{T}'^2 = -\frac{\rho_0}{C_p}\frac{\partial}{\partial x_k}H_k$$

et mettant en évidence une divergence

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\overline{T}'^2 = -\frac{1}{\rho_0 C_p}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{T}' H_k\right) - H_k \frac{\partial \overline{T}'}{\partial x_k}\right]$$

$$= -\frac{1}{\rho_0 C_p}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{T}' H_k\right) + \alpha\left[\frac{\partial \overline{T}'}{\partial x_k}\right]^2 + \overline{\theta u_k}\frac{\partial \overline{T}'}{\partial x_k}$$

On voit également apparaître un terme en

$$\overline{\theta u_k}\,\frac{\partial \overline{T}'}{\partial x_k}$$

dont l'action s'exerce en tout point mais il est affecté d'un signe plus autrement dit s'il constitue un apport pour le champ fluctuant thermique $\theta$ il constituera un prélèvement vis-à-vis du champ des températures moyennes $\overline{T}'$.

* * *

Les équations des corrélations vitesse température s'écrivent en procédant de la même manière. On reconnaît dans les deux équations suivantes celles qui nous ont servi à former l'équation d'évolution des corrélations $\overline{u_i u_j}$ et $\overline{\theta^2}$ multipliées respectivement par $u_i$ et $\theta$ puis moyennées.

*Une comparaison avec l'équation du tourbillon est souvent de ce fait tentée.

$$\overline{\theta\frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{\theta u_k}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} + \overline{U}_k\,\overline{\theta\frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{\theta u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}} =$$

$$-\frac{1}{\rho_0}\overline{\theta\frac{\partial p}{\partial x_i}} + \nu\,\overline{\theta\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}} + \frac{g}{T_0}\overline{\theta^2}\,\delta_{3i}$$

$$\overline{u_i\frac{\partial \theta}{\partial t}} + \overline{u_i u_k}\frac{\partial \overline{T}'}{\partial x_k} + \overline{U}_k\,\overline{u_i\frac{\partial \theta}{\partial x_k}} + \overline{u_i u_k\frac{\partial \theta}{\partial x_k}}$$

$$= \alpha\,\overline{u_i\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k^2}}$$

Opérant à la fois une sommation et un regroupement des termes on trouve:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\theta u_i} + \overline{U}_k\frac{\partial \overline{\theta u_i}}{\partial x_k} = -\overline{\theta u_k}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} - \overline{u_i u_k}\frac{\partial \overline{T}'}{\partial x_k}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{\theta u_i u_k} - \frac{1}{\rho_0}\overline{\theta\frac{\partial p}{\partial x_i}} + \frac{g}{T_0}\overline{\theta^2}\,\delta_{3i} + \nu\,\overline{\theta\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}} + \alpha\,\overline{u_i\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k^2}}$$

L'évolution des corrélations vitesse-température en suivant le mouvement moyen est affectée:

— par l'inhomogénéité spatiale du champ moyen cinématique $d\overline{U}_i / dx_k$ et thermique $d\overline{T'} / dx_k$ au prorata des corrélations déjà existantes $\overline{\theta u_k}$ et $\overline{u_i u_k}$ respectivement,

— par le champ turbulent agissant sur son propre développement,

— par les corrélations pression-température; si la pression disparaît de l'équation fixant l'évolution des fluctuations de température $\theta$ du fait du caractère éminemment scalaire de cette quantité, elles s'introduisent au niveau des corrélations température-vitesse,

— par l'action des forces d'Archimède $\frac{g}{T_0}\overline{\theta^2}\,\delta_{3i}$

— par le rôle conjugué de la viscosité et de la conductibilité; le nombre de Prandtl jouant le rôle de coefficient de pondération

$$\nu\,\overline{\theta\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}} + \alpha\,\overline{u_i\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k^2}} = \nu\left\{\overline{\theta\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}} + \frac{1}{\mathcal{P}}\,\overline{u_i\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k^2}}\right\}$$

Ces termes,dans lesquels figurent des dérivées secondes, sont évidemment actifs sur les fines structures du champ. Viscosité d'une part, conductibilité thermique d'autre part tendent à atténuer les variations brusques de vitesse et de température, cet effacement partial n'étant pas nécessairement aussi actif dans les deux cas, au moins lorsque le nombre de Prandtl est différent de 1. SUNYACH et MATHIEU [22] puis CORRSIN et KUO [33] signalent dans l'air que les structures turbulentes thermiques paraissent réparties de façon plus homogène que les structures turbulentes cinématiques.

Examinons à nouveau le cas d'un écoulement permanent dirigé suivant $x_1$ et possédant des propriétés d'homogénéité dans le plan $x_1\,x_2$. On avait posé

$$\overline{U}_i = V(x_3)\,\delta_{i1}$$

(c'est des modèles simples de ce genre auxquels nous nous référerons ultérieurement) et écrit les équations du mouvement moyen de déviation. Afin de compléter nos connaissances sur le problème d'écoulements quasi parallèles, revenons aux équations des corrélations doubles en un point dans lesquelles nous ferons i = j. Dans un premier temps, nous ne procèderons à aucune sommation sur cet indice répété de façon à saisir comment est alimenté le mouvement turbulent du fait du double processus mécanique et thermique. On a successivement et en négligeant la diffusion liée à $\nu$:

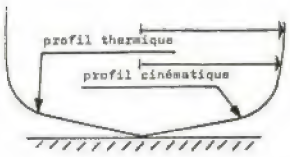
$$0 = -2\,\overline{u_1 u_3}\frac{\partial V}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3}\overline{u_1^2 u_3} - \frac{2}{\rho_0}\overline{u_1\frac{\partial p}{\partial x_1}} - 2\nu\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_k}\right)^2}$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x_3}\overline{u_2^2 u_3} - \frac{2}{\rho_0}\overline{u_2\frac{\partial p}{\partial x_2}} - 2\nu\overline{\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_k}\right)^2}$$

$$0 = 2\frac{g}{T_0}\overline{\theta u_3} - \frac{\partial}{\partial x_3}\overline{u_3^2 u_3} - \frac{2}{\rho_0}\overline{u_3\frac{\partial p}{\partial x_3}} - 2\nu\overline{\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_k}\right)^2}$$

On y retrouve une situation analogue à celle rencontrée dans une couche limite non chauffée. Négligeant l'action thermique on voit en effet que seule la composante $u_1$ est alimentée par l'écoulement moyen. C'est alors le champ de pression qui en tout point redistribue entre les différentes composantes l'énergie fournie à la seule composante $u_1$. Dans le cas qui nous occupe deux composantes sont alimentées par le champ moyen, non seulement la composante $u_1$ bénéficie d'un apport du fait du gradient de vitesse, mais aussi la composante $u_3$ par le truchement du champ thermique associé. L'action de ce dernier, sur les termes prenant en charge la diffusion, se décelle à travers $u_1$ et l'on retrouvera en effet, après sommation dans l'équation d'énergie un terme $u_3\,q^1$. Nous vérifierons par la suite que l'influence du champ thermique sur la diffusion est très efficace.

Pour fixer les idées, il peut être intéressant de préciser la situation rencontrée dans le cas d'un écoulement destabilisé par chauffage d'une paroi inférieure, on a alors les profils cinématiques et thermiques suivants.




Du point de vue moyenne statistique à des $u_3$ positifs sont associés des $u_1$ négatifs de sorte que

$$\overline{u_1 u_3} < 0$$

et

$$\overline{u_1 u_3}\,\frac{\partial V}{\partial x_3} > 0$$

Le même raisonnement montre qu'avec le profil thermique ci-contre $\overline{\theta u_3} > 0$ de sorte que les deux termes producteurs dans les équations précédentes conjuguent leur action. Si la paroi inférieure est refroidie ces deux mêmes termes tendent alors à se neutraliser.

Procèdons maintenant à une sommation sur l'indice i:

$$0 = -\overline{u_1 u_3}\,\frac{\partial V}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3}\left\{\overline{u_3\left(q^2 + \frac{p}{\rho_0}\right)}\right\} - \frac{\nu}{2}\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2} + \frac{g}{T_0}\overline{\theta u_3}$$

Nous poserons par la suite de façon à alléger l'écriture:

$$\Psi_c = \frac{\nu}{2}\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2}$$

Avec les mêmes hypothèses l'équation qui contrôle les fluctuations thermiques $\eta = \theta^2/2$ s'écrit:

$$0 = \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_3}\left(\overline{\theta u_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\overline{\eta u_3}\right) + \alpha\overline{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_3}\right)^2}$$

avec $\Psi_t = \alpha\overline{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_3}\right)^2}$

Dans le cas qui nous occupe c'est la corrélation $\eta\overline{u_3}$ qui présente le plus d'intérêt, elle s'écrit:

$$0 = -\overline{u_3^2}\,\frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3}\overline{\theta u_3^2} - \frac{1}{\rho_0}\overline{\theta\frac{\partial p}{\partial x_3}} + \frac{g}{T_0}\overline{\theta^2} + \nu\left\{\overline{\theta\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_k^2}} + \frac{1}{\sigma}\overline{u_3\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k^2}}\right\}$$

mais il est également possible de faire apparaître l'histoire des corrélations $\overline{\theta u_1}$ et l'on trouve alors:

$$0 = -\overline{\theta u_3}\,\frac{\partial V}{\partial x_3} - \overline{u_1 u_3}\,\frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3}\overline{\theta u_1 u_3} - \frac{1}{\rho_0}\overline{\theta\frac{\partial p}{\partial x}} + \nu\left\{\overline{\theta\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2}} + \frac{1}{\sigma}\overline{u_1\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k^2}}\right\}$$

On voit intervenir sur chacune de ces corrélations qui contrôle respectivement les échanges thermiques transversaux et longitudinaux les gradients de température et de vitesse moyennes tandis que l'action d'Archimède ne se manifeste qu'au niveau de l'équation réglant les flux transversaux.

L'examen de ces équations suggère immédiatement de comparer la production thermique à la cinématique. Ainsi introdui-on le nombre de Richardson

$$R_f = \frac{g/T_0\;\overline{u_3\theta}}{\overline{u_1 u_3}\;\partial V/\partial x_3}$$

Si l'on revient à l'exemple précédement traité on constate que le régime instable pour lequel les forces de poussée d'Archimède tendent à accroître l'énergie turbulente correspond à des nombres de Richardson négatifs ($u_3\theta > 0$; $\overline{u_1 u_3} < 0$; $dV/dx_3 > 0$). Le régime stable correspond bien évidement à des nombres de Richardson positifs.

Dans le cas où l'on admet un liaison simple entre corrélations et champ moyen on a en posant

$$-\overline{u_1 u_3} = \varepsilon_c\,\frac{\partial V}{\partial x_3} \qquad \overline{\theta u_3} = \varepsilon_T\,\frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_3}$$

$$R_f = \frac{g}{T_0}\,\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_c}\,\frac{\partial \overline{T'}/\partial x_3}{\left(\partial V/\partial x_3\right)^2}$$

souvent les météorologistes supposant $\varepsilon_c = \varepsilon_T$ c'est-à-dire l'égalité des deux coefficients de diffusion cinématique et thermique préfèrent ne considèrer que la forme simplifiée du nombre de Richardson

$$R_i = \frac{g}{T_0}\,\frac{\partial \overline{T'}/\partial x_3}{\left(\partial V/\partial x_3\right)^2}$$

plus facile à atteindre expérimentalement et appelée nombre de Richardson de gradient.

L'examen des mêmes équations nous conduit d'emblée à introduire une comparaison entre production et dissipation en posant

$$D = -\frac{\Psi_c}{\overline{u_1 u_3}\;\partial V/\partial x_3}$$

Ces arrangemens formels coduisent au bilan d'énergétique suivant:

$$-\overline{u_1 u_3}\frac{\partial V}{\partial x_3}\left(1-R_i-D\right)-\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\overline{u_3\left(q^2+\frac{p}{\rho_0}\right)}\right]=0$$

le dernier terme prenant en charge, au point considéré, l'énergie importée ou exportée. L'aspect énergétique du problème revient donc a examiner le signe de l'expression

$$\left(1-R_i-D\right)$$

où D est un nombre essentiellement positif et R un nombre négatif (cas instable) ou positif (cas stable). On conçoit alors comment le phénomène thermique peut alimenter ou modèrer le mouvement turbulent. Une analyse des conditions ou stabilité faite par Taylor (1931) montre que pour $R_i > 0{,}25$ aucune turbulence n'existe en l'absence de perturbations extérieures importantes. En soufferie, des mesures de turbulence ont été faites par ELLISON (1962) jusqu'à des valeurs de $R_i$ voisines de 1 encore qu'il soit difficile d'affirmer que ladite turbulence ne soit pas en déclin. Dans l'atmosphère par contre il semble bien qu'aucune turbulence n'ait pu être décelée dès que $R_i$ excède la valeur 0,2.

### 1.4 *Régimes d'écoulement des couches limites stratifiées*

Les indications précédentes permettent donc un classement des couches stratifiées et certains rapprochements avec les modèles homogènes étudiés.

*Conditions stables:*

En dehors du cas exceptionnel où l'atmosphère serait complètement calme on trouve au voisinage du sol une région où $R_i$ est faiblement positif. L'effet du champ thermique n'est cependant pas suffisament intense pour «étouffer» tout mouvement d'agitation. Dans cette zone où la tension demeure sensiblement constante et égale à la tension pariétale on peut considérer que comme dans une couche limite ordinaire production et dissipation contrôlent à peu près seules les mécanismes turbulents.

Lorsque l'on gagne les couches plus élevées $R_i$ croît et la turbulence cinématique est en quelque sorte absorbée. Cette évolution de la stabilité avec l'altitude est rendue possible du fait que l'énergie cinétique turbulente a une double origine: une origine cinématique pour laquelle gradient de vitesse moyenne et contraintes sont associés, et une origine thermique ne mettant en cause aucun gradient moyen.

*Conditions instables:*

Nous plaçant dans le cadre des approximations météorologiques classiques nous tenterons de distinguer 4 régions:

I —Du fait de l'évolution relative des 2 productions turbulentes (cinématique et thermique) on doit s'attendre à rencontrer au voisionge de toute paroi là où les gradients de vitesse sont intenses une région $x_3 < 10$ m où domine l'aspect cinématique.

Les caractéristiques de l'écoulement sont alors celles relevées sur des couches limites de soufflerie, Cette région de prévalance est encore appellée *région de convection forcée*. Les deux phénomènes cinématiques et thermiques s'y trouvent totalement découplés, le premier fixant les modalités de fonctionnement du second. Le nombre de Richardson est tel que $|R_i| < 0{,}03$.

II — Au delà de cette zone existe une région située dans la gamme des altitudes suivantes $10 < x_3 < 100$ m $< |R_i| < 0{,}1$, pour laquelle le transfert vertical de quantité de mouvement et de chaleur est essentielement dû à la convection thermique. Ne retenant que cet aspect du problème, elle est le plus souvent désignée par *«région de convection libre»***, appellation quelque peu abusive si l'on se rend compte que la convection libre proprement dite n'apparît que lorsque le nombre de Richardson est égal à 1*. Plus précisément, disons que les effets thermiques y créent des mouvements verticaux à grande échelle bien corréllés avec la température dont le champ est déterminant quant à leur formation. Ces structures turbulentes particùlièrement efficaces sur le plan des échanges ont des dimensions comparables à celle de la zone instable, du point de vue spectral elles correspondent à la partie basse fré-

* Pour cette valeur énergie mécanique et thermique se produisent au même taux.

** Nous préférerions l'appellation *région de convection* mixte.

quence du spectre se différentiant ainsi assez nettement des structures d'origine mécanique à fréquences moyennes et élevées. Notons encore que l'anisotropie de cette agitation d'origine thermique est très marquée, en tous cas davantage que celle d'origine mécanique. Bref cette région est caractérisée par la présence de larges structures convectives d'origine thermique assurant l'essentiel des échanges (mécaniques et thermiques). Cependant si de ce point de vue on assiste à une prédominance de l'aspect thermique, cela ne signifie pas pour autant que la quantité d'énergie mécanique soit très faible vis-à-vis de celle liée à ces mouvements convectifs de vaste amplitude. Compte tenu de ce quasi-découplage, Lumley et Panofsky acceptent sur le plan thermique l'idée d'un bilan turbulent donné par les équations suivantes:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x_3}\overline{u_3 q^2} + \frac{g}{T_0}\overline{\theta u_3}$$

$$0 = \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_3}\overline{\theta u_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}\overline{\eta u_3} \quad \text{avec } \eta = \frac{\theta^2}{2}$$

La 1ère équation lie par l'intermédiaire de $u_3$ les mouvements convectifs verticaux à leur terme producteur en l'occurence la poussée d'Archimède $g/T_0\,\overline{\theta u_3}$. Cette même composante $u_3$ intervient alors dans l'équation qui fixe le niveau $\eta$ des fluctuations de température. Notons qu'eu égard aux échelles turbulentes mises en jeu le fait de négliger les effets moléculaires paraît justifié. Moins bien contrôlé est l'abandon des corrélations pression vitesse dont le rôle sur la «diffusion» n'a pas été non plus retenu.

Ce modèle thermique relatif à une turbulence homogène sera complété par un modèle mécanique lui aussi homogène sans autre lien avec le précédent qu'un processus accéléré de diffusion turbulente permettant en partie à l'énergie mécanique d'émigrer vers des régions de la couche atmosphérique où la dissipation se trouve accélérée par l'intermédiaire d'un processus thermique.

III — Plus haut entre 100 et 1000 m, se situe une région de transit. Le champ thermique y crée un mécanisme de diffusion *toujours* aussi efficace par l'intermédiaire des termes en $\overline{u_i q^2}$ mais cette fois leur relative homogénéité spatiale conduit à supposer leur divergence nulle. Une certaine énergie mécanique est créée du fait des fluctuations thermiques associées au champ gravifique ($|R_i| > 0{,}1$) mais un certain emiettement des structures turbulentes permet grosso-modo de la dissiper sur place. Si bien que le modèle proposé répond sur le plan thermique à la relation:

$$0 = \frac{g}{T_0}\overline{u_3\theta} - \nu\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2}$$

IV — Au dessus de 1000 m se trove une région d'atmosphère stable. Les fluctuations cinématiques transportée depuis les basses couches y sont réduites par le jeu de poussées d'Archimède adverses tandis que la viscosité affirme son action en profondeur sur les plus petites structures turbulentes.

L'agitation thermique importée depuis les basses couches de l'atmosphère et celle née du processus de réduction déjà évoquée se voient réduites finalement par l'action de la conductibilité thermique. Pour cette région, un modèle homogène répondant aux équations suivantes a été donné par les auteurs déjà cités:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x_3}\overline{u_3 q^2} - \Psi_c + \frac{g}{T_0}\overline{\theta u_3}$$

$$0 = \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_3}\theta u_3 + \frac{\partial}{\partial x_3}\eta u_3 + \Psi_b$$

1.5 *Examen des conditions de similitude*

Revenons aux équations suivantes régissant le mouvement moyen de déviation:

$$\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial t} + \overline{U_j}\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \overline{P'}}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_j^2} + \frac{g}{T_0}\overline{T'}\,\delta_{i1}\,(*)$$

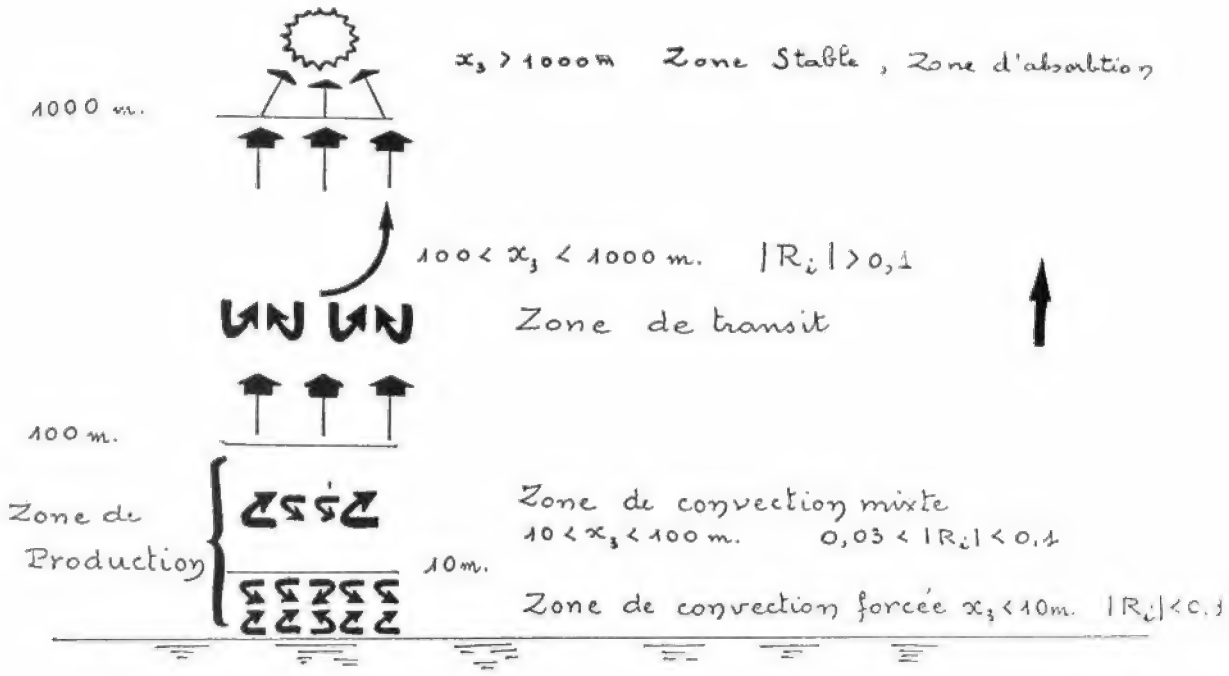
$$\frac{\partial \overline{T'}}{\partial t} + U_j\frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j\theta}}{\partial x_j} = \alpha\frac{\partial^2 \overline{T'}}{\partial x_j^2}$$

défini par rapport à une atmosphère neutre dont les propriétés sont décrites par:

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_0}{\partial x_i} + g\,\delta_{3i} = 0$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial x_i} + \frac{g}{C_p}\,\delta_{3i} = 0$$

* Dès que l'on veut prendre en charge des domaines importants de fluide situés en altitude, les forces de Coriolis doivent être prises en compte. Elles apparaissent alors dans le 1er membre de l'équation sous la forme $\varepsilon_{ijk}\,\Omega_j U_k$




Adoptons les grandeurs de référence suivantes:

— une vitesse moyenne $U^*$

— une dimension linéaire $L^*$

— une masse volumique $P^*$

— une déviation de température $T^*$

La cohérence du système oblige à choisir pour échelle de temps

$$t^* = \frac{L^*}{U^*}$$

et pour échelle de pression $P^* = \rho U^{*2}$

Opérons alors le changement de variables:

$$x_j^* = \frac{x_j}{L^*} \quad ; \quad U_j^* = \frac{\overline{U_j}}{U^*} \quad ; \quad t^* = \frac{t}{t^*} = t\frac{U^*}{L^*}$$

$$\rho_0^* = \frac{\rho_0}{\rho_0^*} \qquad P^* = \frac{\overline{P'}}{P^*} \qquad T^* = \frac{\overline{T'}}{T^*} \qquad \overline{u_j^* \theta^*} = \frac{\overline{u_j \theta}}{U^* T^*}$$

il vient :

$$\frac{\partial U_i^*}{\partial t^*} + U_j^* \frac{\partial U_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial \overline{u_i^* u_j^*}}{\partial x_j^*} = -\frac{1}{\rho_0^*}\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 U_i^*}{\partial x_j^{*2}} + \frac{1}{F_r^2} T^* \delta_{i3}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + U_j^* \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial \overline{u_j^* \theta^*}}{\partial x_j^*} = \frac{1}{R_e P_r}\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_j^{*2}} \quad (*)$$

On voit apparaître les 3 paramètres adimensionnels classique:

— le nombre de Reynolds $R_e = \frac{U^* L^*}{\nu}$ qui représente le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité,

— le nobre de Prandtl $P_r = \frac{\mu c_p}{\lambda}$ dans lequel seules se trouvent associées les propriétés physiques du fluide,

— le nombre de Froude $F_r^2 = \frac{U^{*2}}{g L^* \beta T^*}$

où $\beta = 1/T_0$ qui compare ces même forces d'inertie aux forces de poussés d'Archimède.

Les météorologistes préfèrent souvent caractériser la stabilité thermique de l'écoulement par la longueur dite longueur de Monin Obukhov construite sur les 3 paramètres suivants

$$\frac{g}{T_0} \quad , \quad U_f \quad , \quad \frac{H_p}{\rho c_p U_f}$$

* Si l'on avait conservé les forces d'inertie de Coriolis dans les équations précédentes de façon à mieux cerner le problème météorologique on aurait fait apparaître le nombre de Rossby $R_o = U^*/L^*\Omega^*$ où $\Omega^*$ désigne un vecteur unitaire porté par la ligne des pôles. C'est le rapport entre les forces d'inertie de Coriolis et celles résultant de la non permanence et de la non uniformité du champ de vitesse qui est pris en charge par $R_o$. Pour fixer les idées disons que l'on n'aura pas à se soucier de ce paramètre lorsque la dimension caractéristique du site est inférieure à 15 km.

où $U_f$ désigne toujours la vitesse de frottement et $H_p$ le flux thermique pariétal. On posse alors:

$$\mathcal{L} = \frac{U_f^3}{k \frac{g}{T_0} \frac{H_p}{\rho c_p}}$$

$k$ désignant la constante de Karman.

Introduisons la température de frottement $T_f$ telle que

$$H_p = \rho c_p U_f T_f$$

il vient:

$$|\mathcal{L}| = \frac{U_f^2}{k . g/T_0 \, T_f}$$

Par tradition la longueur de Monin est choisie de façon à être positive lorsque le flux thermique pariétal est négatif c'est-à-dire lorsque la couche stratifiée est stable, elle est négative dans le cas contraire.

La température de référence $T_0$ peut être prise égale à la température moyenne dans la couche.

Bornons-nous pour l'instant à ne considérer que les similitudes de Reynolds et de Froude.

La première constitue le principal obstacle aux études sur modèle, les échelles géométriques couramment utilisées (de l'ordre du 1/500ème) conduisent en effet à des nombres de Reynolds 10 fois plus faibles que sur le prototype. Cependant dans la plupart des cas le vent souffle sur des terrains comportant suffisamment d'accidents géométriques à arêtes vives pour qu'un régime turbulent rugueux s'éttablisse. L'action de la viscosité sur les profils moyens de vitesse s'efface et son rôle sur la grandeur et la maquette doit être discuté du seul point de vue de la turbulence: la similitude au niveau des petites structures dont le rôle est essentiellement dissipatif risque seule d'être gravement mise en défaut.

Le nombre de Froude qui compare les forces d'inertie aux forces de poussée d'Archimède lesquelles résultent de l'écart de température entre l'atmosphère réelle et l'atmosphère neutre peut facilement être le même dans la grandeur et dans la maquette. On réalisera cette égalité soit par chauffage soit par refroidissement du plancher choisissant par ailleurs des vitesse d'écoulement appropriées généralement très faibles; dans ce choix la limite inférieure devra tenir compte des exigences imposées par les problèmes métrologiques.

Nous verrons par la suite comment la longueur de Monin Obukhov, qui ne prend en charge que des propriétés moyennes du champ d'écoulement s'articule avec le nombre de Richardson.

1.6 *Profils de vitesse et de température*

Dans tout écoulement turbulent faiblement destabilisé par chauffage les caractéristiques moyennes à la hauteur $x_3 = z$ dépendent comme on peut le voir d'après les équations établies de

$$z, \ \rho_0, \ g/T_0, \ U_f, \ \frac{H}{\rho_0 c_p}, \ \mu \text{ et } \lambda$$

Ces sept quantités étant liées à quatre dimensions fondamentales: longeur, masse, temps et température, nous pouvons introduire en plus des nombres de Reynolds et de Prandtl un groupement adimensional tel le nombre de Froude ou mieux le rapport z/L. Dans le cas où la paroi à travers laquelle se produit l'échange visqueuse, il faut encore ajouter aux paramètres ci-dessus énoncés une hauteur $z_0$ caractéristique des rugosités ce qui entraîne évidemment l'apparition d'un nouveau nombre adimensionel.

Nous allons examiner dans ce qui suit quelles sont les formes de profil de vitesse et de température auxquelles on doit attendre dans ce type d'écoulement.

A — *Profils de vitesse et de température en atmosphère pratiquement neutre*

L'examen de ce problèms est suffisament classique pour que nous ne procèdions qu'à un bref rappel portant essentiellement notre attention sur la zona turbulente pariétale qui s'étend sur environ 20% de l'épaisseur de la couche limite et à l'intérieur de laquelle les variations de la contrainte tangentielle restent faibles.

La situation que nous allons décrire correspond aussi bien à celle de l'amosphère neutre qu'au cas d'un écoulement suffissamment peu chauffé pour que le phénomère thermique n'influe pas sur le mécanique. Pour le problème traité il s'agit donc d'une sorte de cas limite.

Pour faire bref remarquons simplement que le rapport $\frac{U_f}{dU/dz}$ a les dimensions d'une longueur

Dans la couche limite pariétale qui est supposée ignorer la struture d'ensemble de l'écoulement et en particulier l'épaisseur $\delta$ de la zone perturbée la seule dimension à laquelle ce rapport puisse etre comparé est la hauteur z. On a alors:

$$\frac{U_f}{dU/dz} \sim z \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dz} = A \frac{U_f}{z}$$

$$U(z) = A U_f \log z + A_1$$

où $A_1$ est une nouvelle constante qui peut dépendre soit de la viscosité soit de la hauteur caractéristique $z_0$ des rugosiés.

Dans le cas *d'une paroi lisse* on retrouvera la «loi de paroi» où figure la constante k de Karman

$$\frac{\bar{U}}{U_f} = \frac{1}{k} \ln \frac{z U_f}{\nu} + \text{Cste}$$

Dans le cas *d'une paroi rugueuse* on aura, en supposant négligeable l'action de la viscosité sur le profil moyen:

$$\frac{\bar{U}}{U_f} = \frac{1}{k} \ln \frac{z+z_0}{z_0} \qquad (*)$$

La production d'énergie turbulente $W_c$ particulirèrement intense dans la zone pariétale s'exprime aisément en fonction de $U_f$ et z. Négligeant les variations de $\tau$ qui sera pris en tout point égal à $\tau_p$ on a:

$$W_c = \frac{\tau_p}{\rho} \cdot \frac{dV}{dz} = \frac{U_f^3}{kz}$$

Reprenant le même raisonnement pour le champ de température, il suffit de remarquer que le rapport $T_f/d\bar{T}'/dz$ a lui aussi les dimensions d'une longueur. La seule disponible dans la couche pariétale étant z on voit que

$$\bar{T}'(z) = B\, T_f \log z + B_1$$

où $B_1$ est une nouvelle constante qui peut dépendre soit de la viscosité et de la conductibilité thermique, soit de la hauteur caractéristique $z_0$.

Le parallèle peut encore se poursuivre sur le plan de la production. La turbulence thermique $\kappa = \theta^2/2$ est alimentée au taux de $\overline{\theta w}\, \partial T'/\partial z$. Si l'on suppose le flux sensiblement constant et égal à sa valeur à la paroi $H_p$ on a alors

$$W_T = \frac{1}{k} \frac{U_f T_f^2}{z}$$

Puisqu'il s'agit d'une atmosphère neutre, la notion de longueur de Monin Obukhov n'a pas grand sens physique. Cependant on peut donner avec Monin une interprétation qui s'avère à l'usage moins fragile qu'il n'y parait.

Quant à la participation du champ thermique à la turbulence cinématique elle est égale à $g/T_0\, \overline{w\theta}$ si bien que se plaçant toujours dans la couche à tension et flux constant on peut écrire:

$$R_f = \frac{g/T_0\, \overline{w\theta}}{\overline{uw}\; d\bar{U}/dz} = \frac{g/T_0\, H_p/\rho c_p}{U_f^3/kz} = \frac{g/T_0\, U_f T_f}{U_f^3/kz}$$

$$R_f = \frac{z}{\dfrac{U_f^2}{\dfrac{g}{T_0} T_f}} = \frac{z}{\ell}$$

---

* Pour l'ensemble de la couche limite partant de $U_1 = f[x, z, U_f, \nu]$ la présentation suivante peutêtre retenue. Pour la zone turbulente pariétale on adopte la forme suivante:

$$U/U_f = F_1\left[\frac{z U_f}{\nu}\right] + F_2\left[\frac{z}{\delta}\right]$$

et pour la zone turbulente centrale une forme situant l'écoulement par rapport à l'écoulement sain de vitesse $U_\infty$.

$$\frac{U_\infty - U}{U_f} = G_1\left[\frac{z}{\delta}\right] + G_2\left[\frac{z U_f}{\nu}\right]$$

désigne l'épaisseur de la couche. Remarquat alors que $U/U_f$ et $U_\infty - U/U_f$ dépendent fortement des fonctions indicées «1» et faiblement des fonctions indicées «2» ceci donne au problème un tour analogue à celui rencontré dans les méthodes de perturbation (Van Dycke [37]). Une tentative de raccordement des deux représentations dans une bande étroite à cheval sur la limite externe de la zone turbulente pariétale et la limite interne de la zone turbulente centrale conduit en première approximation à une loi logarithmique

$$U/U_f = A + B \log \frac{z U_f}{\nu}$$

Une formulation analogue peut être donnée pour les températures

$$T'/T_f = C + D \log \frac{z U_f}{\nu}$$

Remarquons que dans sa présentation Millikan néglige d'emblée $F_2$ et $G_2$ et son raisonnement se réduit à reconnaître que la fonction logarithmique est la seule qui permette par soustraction de faire disparaître des constantes. On pourra lire également la contribution à l'étude du transfert thermique de RONAT [28].

### B — *Profils de vitesse et de température en atmosphère faiblement instable (L fini)*

Nous pourrions chercher à éclairer davantage le mécanisme qui nous occupe en nous appuyant sur un second cas limite celui de la convection libre. Il s'agit bien en effet pour nous de définir ce que peut être une interaction au 1er ordre entre champ thermique et cinématique.

On peut facilement reconnaître pour le problèmes de turbulence libre un processus convectif moteur lié au erme $g\, H_p / PC_p\, T_o$. Avec le rapport z/L ce mécanisme générateur (dans la forme où il apparaît pour le problème qui nous occupe) est comparé à la production d'énergie turbulente à l'altitude z puisque

$$\frac{\mathcal{L}}{z} = \frac{U_f^3}{kz \cdot \frac{g}{T_o} \frac{-H_p}{\rho C_p}}$$

En atmosphère neutre une telle comparaison perd son sens et l'on comprend qu'alors $|L| = \infty$.

Avec Monin et Obukhov nous introduisons alors la quantité

$$S = \frac{kz}{U_f} \frac{d\overline{U}}{dz}$$

qui pour une atmosphère neutre doit être égale à l'unité. Le coefficient de viscosité turbulente cinématique $\varepsilon_c$ s'y trouve lié par la relation

$$S = \frac{k U_f z}{\varepsilon_c} \quad . \qquad \text{puisque} \quad \varepsilon_c = \frac{U_f^2}{d\overline{U}/dz}$$

De façon analogue nous poserons

$$R = \frac{kz}{T_f} \frac{d\overline{T}}{dz}$$

Le coefficient de viscosité turbulente thermique $\varepsilon_T$ se trouve lié à $U_f$ et $T_f$ par

$$\varepsilon_T = \frac{kz}{T_f} \frac{dT'}{dz}$$

Dans ces conditiins on a

$$R = \frac{k U_f z}{\varepsilon_T}$$

et ainsi

$$S = R \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_c}$$

Nous reviendrons par la suite sur la signification de ces deux coefficients $\varepsilon_T$ et $\varepsilon_c$; en fait ils ne se justifientique par les commodités ou'ils introduisent dans bon nombre de raisonnement et plus particulièrement dans le domaine météorologique.

C'est par rapport à ce cas idéal de l'atmosphère neutre que le cas de la couche destabilisée constitue une déviation du 1er ordre.

Un examen de quantités devant intervenir dans ce problème z, L, U, $U_f$* incite à former un gradient adimensionel de vitesse fonction de la distance réduite **z / L**

$$\frac{d(U/U_f)}{d(z/\mathcal{L})} = g\left(\frac{z}{\mathcal{L}}\right)$$

Multipliant ces deux quantités par kz/L il vient

$$S = \Phi_1\left[\frac{z}{\mathcal{L}}\right]$$

et de façon analogue

$$R = \Phi_2\left[\frac{z}{\mathcal{L}}\right]$$

Puisqu'il s'agit de «faible déviation» on pourra toujours poser:

$$\Phi_1\left[\frac{z}{\mathcal{L}}\right] = 1 + \beta \frac{z}{\mathcal{L}}$$

où $\beta$ désigne une constante. Alors de

$$S = \frac{kz}{U_f} \frac{dU}{dz} = 1 + \frac{z}{\mathcal{L}}$$

on tire:

$$\frac{\overline{U}}{U_f} = \frac{1}{k}\left\{\log \frac{z}{z_o} + \beta \frac{z}{\mathcal{L}}\right\}$$

relation valable pour $z >> z_o$ (pour des raisons de commodité $z_o$ a été introduit comme constante d'intégration).

Nous donnerons une variante de cette formule du fait que généralement L est inconnue les flux de chaleur demeurant très difficile à mesurer. Dans ces conditions on évalue flux et contraintes à partir des gradients de

* Seules sont prises en compte des altitudes $z >> z_o$ de telle sorte que $z_o$ ne figure pas dans ce recensement.

température et de vitesse en introduisant les coefficients $\varepsilon_C$ et $\varepsilon_T$. La grandeur L' correspondante est

$$\mathcal{L}' = \frac{u_f}{kg} \frac{\left[ \frac{du}{dz} \right] T_0}{\left[ dT'/dz \right]}$$

et l'on voit qu'alors L et L' sont liés:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \; \varepsilon_T / \varepsilon_c$$

Si l'on considère $\varepsilon_T / \varepsilon_c$ non plus comme une constante mais comme une fonction du rapport de z/L, alors:

$$S = \Phi_s \left[ \frac{z}{\mathcal{L}'} \right]$$

et l'on a en première approximation

$$\frac{\overline{u}}{u_f} = \frac{1}{k} \left\{ \log \frac{z}{z_0} + \beta' \frac{z}{\mathcal{L}'} \right\}$$

avec

$$\beta' = \beta \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_c}$$

La valeur de $\beta'$ devrait être constante mais Lumley et Panofsky signalent des divergences importantes selon les auteurs consultés. Elle est estimée à 4 par Deacon (1962) à 4,5 par Panofsky, Blackadar et Mc Vehil (1960) à 6 par Taylor...

On aura pour les profils de température une relation analogue à la précédente en supposant $\varepsilon_T / \varepsilon_C$ peu différent de 1

$$\frac{\overline{T'} - \overline{T_0'}}{T_f} = \frac{1}{k} \left\{ \log \frac{z}{z_0} + \beta' \frac{z}{\mathcal{L}'} \right\}$$

Rappelons que le nombre de Richardson de flux défini par:

$$R_i = \frac{g}{T_0} \frac{dT'/dz}{(du/dz)^2}$$

s'exprime aisément en fonction de $\beta'$ et Z/L' dans la zone de profils logarithmiques

$$R_i = \frac{z/\mathcal{L}'}{1 + \beta' z/\mathcal{L}'}$$

Cette brève revue nous permet donc de connaître à quelle déviation des profils moyens de vitesse et de température l'on est en droit de s'attendre lorsqu'un écoulement est faiblement perturbé du fait d'échanges thermiques àtravers une paroi horizontale.

# FÁBRICA DE CIMENTOS DA MATOLA

## MOÇAMBIQUE

OS MAIS ALTOS SILOS DE PORTUGAL E DO CONTINENTE AFRICANO
CONSTRUÇÃO COM MOLDES DESLIZANTES
75 METROS DE ALTURA EM 18 DIAS

PERFEIÇÃO TÉCNICA • RAPIDEZ DE EXECUÇÃO

**CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, S.A.R.L.**

# Escolhe o variador de rotação .*.

- **VARIADORES HIDRO-ESTATICOS DE VELOCIDADE INFINITAMENTE VARIAVEL até 40 HP à velocidade máxima na saida, relação máxima 27:1 com operação manual, eletrica, hidraulica ou pneumatica**
- **VARIADORES MECANICOS até 75 HP - relações desde 2:1 até 16:1**

## monte a transmissão completa utilizando

**OS PRODUTOS**

# RENOLD

**PARA A TRANSMISSÃO DE FORÇA**

* ou transmissão à corrente, corrente transportadora, redutor, luva de acoplamento, embreagem, freio etc.

*Informações técnicas sobre a linha completa de produtos RENOLD na:*

RENOLD LIMITED
SALES DIVISION
MANCHESTER ENGLAND

RENOLD HOLROYD Crofts CARTER

**HARKER SUMNER & CIA LDA.**
**38 Rua de Ceuta, 48 PORTO**
Apartado No. 162. Tél: 27054 (4 linhas)

**14 Largo do Corpo Santo, 18 LISBOA-2**
Tél: 324823, 35124.

# Resumo dos Artigos publicados na «Técnica» n.º 424

## Ano L — Março 1975

C. D. U. 621.3:517.512.2

LUIS HENRIQUE MARTINS BORGES DE ALMEIDA
e
GUILHERME DINIZ MORENO DA SILVA ARROZ

### ESTUDO EXPERIMENTAL DA APLICAÇÃO DO CEPSTRO (1) À DETECÇÃO DE ECOS E PERIODICIDADES EM SINAIS

Técnica N.º 424 — L — 3-1975, p. 167 a 184

Este artigo, que constituiu relatório de um estágio, realizado no Centro de Estudos de Electrónica, passa rapidamente em revista a técnica do Cepstro, pondo em relevo a sua utilidade na detecção de ecos e periodicidades e na demarcação, com precisão, da época da sua ocorrência. Além de uma breve análise teórica da técnica utilizada, apresentam-se algumas simulações em computador e também alguns casos reais.

C. D. U. 539.232.543.42

LEOPOLDO J. M. GUIMARAES

### ESPECTROS DE MASSA E ENERGIA NA FORMAÇÃO DE PELÍCULAS FINAS USANDO O PROCESSO DE «EVAPORAÇÃO POR IMPACTO»

Técnica N.º 424 — L — 3-1975, p. 213 a 220

O conhecimento dos espectros de massa e de energia das partículas incidentes no substrato, quando da formação de Películas Finas é de extrema importância para a compreensão dos seus processos de formação e crescimento, intimamente ligados às propriedades macroscópias que apresentam. Para a determinação destes espectros, construiu-se um analizador de massa e de enegia cuja montagem se adaptou ao estudo do processo de «Evaporação por Impacto».

C. D. U. 624.072.23

J. S. BRAZÃO FARINHA

### VIGAS CONTINUAS PARCIALMENTE ENCASTRADAS

Técnica N.º 424 — L — 3-1975, p. 185 a 212

Apresenta-se o formulário geral correspondente a vigas contínuas simétricas de 2 a 4 tramos, com apois extremos encastrados. Elaboram-se tabelas para os casos de iguais vãos e actuação de cargas de distribuição trapezoidal, e de desiguais vãos e actuação de cargas uniformemente distribuidas.
Toda a dedução se baseia na aplicação do método de Cross, notavelmente expedito para este tipo de estruturas.

C. D. U. 533 15:551.554:628.52

J. MATHIEU

### DIFUSÃO NAS CAMADAS LIMITES ESTRATIFICADAS

Técnica N.º 424 — L — 3-1975, p. 221 a 236

Estuda-se a estrutura das baixas camadas da atmosfera usando uma atmosfera padrão em referência à qual é analisado o escoamento real sob a forma de uma perturbação. Estabelecem-se os perfis de velocidade e temperatura médias na camada limite atmosférica para várias condições de estabilidade.
Faz-se o estudo da difusão turbulenta pela analogia molecular e pela teoria estatística sendo analisadas as dificuldades decorrentes da não linearidade do fenómeno. Mostra-se como uma perturbação térmica pode acelerar o processo da difusão turbulenta ou pode bloqueá-lo consoante o tipo de estabilidade da atmosfera.
Referem-se os ensaios efectuados em túnel aerodinâmico, as limitações e vantagens em relação às medidas «in situ». As dificuldades de transposição dos resultados do túnel para a atmosfera são devidas em primeiro lugar à pequenez das escalas de tempo e comprimento no túnel e à dificuldade em simular regimens com instabilidade significativa. Apresentam-se vias para melhorar estes aspectos.
A comodidade e economia das medições feitas em túnel justificam a sua utilização e desenvolvimento mesmo que sejam aplicadas apenas para o estudo de tendências ou efeitos globais.

# Synopsis of articles published in «Técnica» n.° 424

## L — March 1975

U. D. C. 539.232:543.42

LEOPOLDO J. M. GUIMARAES

ENERGY ANALYSIS OF PARTICLES ON THE SUBSTRACTE USING A PROCESS «CATHODIC SPUTTERING»

Técnica N.° 424 — L — 3-1975, p. 213 a 220

The nature of the particles incident on a substracte is od basic interest for on understandig of the nucleation process of thin films obtained by deposition.
A sintable device has been constructed to study the nature and energy of those particles, using a «cathodic Sputtering» process.

U. D. C. 621.3:517.512.2

LUIS HENRIQUE MARTINS BORGES DE ALMEIDA
e
GUILHERME DINIZ MORENO DA SILVA ARROZ

AN EXPERIMENTAL STUDY OF THE CEPSTRUM APPLICATION TO ECHOS AND PERIODICITIES DE TECTION

Técnica N.° 424 — L — 3-1975, p. 167 a 184

This paper, wich is a trainee report of a work done in the Centro de Estudos de Electrónica, shortly describes, with examples, the Cepstrum technique outlining its usefullness in the deteccion of echoes and periodicities, and in defining the exact epoch they occur in. Apart from a brief theoretical analysis of the technique some simulations in a computer and some real examples are treated.

U. D. C. 533.15:551.554:628.52

J. MATHIEU

DIFFUSION IN STRATIED BOUNDARY LAYERS

Técnica N.° 424 — L — 3-1975, p. 221 a 236

The structure of the atmospheric boundary layer is studied by means of a «deviation flow» from the standard atmosphere.
Mean velocity and temperature profiles are stablished for several stability conditions.
Turbulent diffusion is studied both through a gradient transport approach and through a statistical theory. Difficulties due to the non linearity of the phenomena are analysed. It is shown how a destabilizing thermal action can speed up turbulent diffusion.
Measurements in wind tunnel and its limitations and advantages are compared with «in situ» measurements. Difficulties in transposig the wind tunnel measurements to full scale are mainly due to the small wind tunnel time and length scales and to the difficulty of simulating fairly unstable flows. Several ways of improving the measurements are presented. Economy and convenience of wind tunnel measurements justify its utilization and development even if our purpose is to seek tendencies or global effects.

U. D. C. 624.072.23

J. S. BRAZAO FARINHA

CONTINUOUS PARTIAL FIXED END BEAMS

Técnica N.° 424 — L — 3-1975, p. 185 a 212

The general analysis of continuous simmetrical and partialy fixed end beams is developed by Cross method. Some tables of trapezoidal charges and rectangular charges, are presented.

# Publicações Recebidas

## PUBLICAÇÕES PERIÓDICAS

— AGROS
Associação dos Estudantes de Agronomia

— ANNALES DE MECÁNICA Y ELETRICIDAD
Asociacion de Ingenieros del I. C. A. I.

— ANALYTICAL ABSTRACTS

— ASEA — REVUE

— ANNALES
Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics

— AEG - TELEFUNKEN AL DIA
Allgemeine Elektricitats - Gesellshaft Aeg - Telefunken

— ACTA TÉCNICA
Academiae Scientiarum Hungaricae

— BOLETIM DA CÂMARA MUNICIPAL DE SÁ DA BANDEIRA

— BOLETIM ECONÓMICO E FINANCEIRO
Banco Borges e Irmão

— BOLETIM
Instituto Nacional de Investigação Industrial

— BOLETIM MENSAL DE INFORMAÇÃO
Laboratório Nacional de Engenharia Civil

— BULLETIN OF THE SEISMOGRAPHIC STATIONS
University of California

— BOLETIM DEL CEMENTO PORTLAND
Instituto del Cemento Portland Argentino

— BOLETIM GTH
Gabinete Técnico da Habitação da Câmara Municipal de Lisboa

— BOLETIM
Sociedade Geológica de Portugal

— Boletim INFORMATIVO IRANOR
Instituto Nacional de Racionalização e Normalização

— CORTIÇA
Instituto dos Produtos Florestais

— CEMENTO HORMIGÓN

— COLLECTION
Czechoslovak Academy of Sciences

— CENIM
Centro Nacional de Investigaciones Metalurgicas

— (JOURNAL OF) CHEMICAL EDUCATION
Division of Chemical Education of the American Chemical Society

— COURRIER CERN

— CIMENTO E CONCRETO
Associação Brasileira de Cimento Portland

— COMUNICACIONES ELÉCTRICAS
International Telephone and Telegraph Corporation

— DYNA
Asociacion de Engenieros Industriales de España

— ECONOMIC REVIEW
Câmara de Comércio Luso-Britânica

— EL ESTAÑO Y SUS APLICACIONES
Tin Research Institute

— ELECTRICITE DE FRANCE
Direction des Etudes et Recherches

— ELECTRICIDADE
Empresa Editorial Electrotécnica Edel, Lda.

— FUNDIÇÃO
Associação Portuguesa de Fundição

— FUNDEXPORT
Fundo de Fomento de Exportação

— GEOTÉCNICA
Revista da Sociedade Portuguesa de Geotécnica

— INDÚSTRIA DE MOÇAMBIQUE
Associação Industrial de Moçambique

— ION
Sindicato Nacional de Indústrias Químicas

— INDÚSTRIA PORTUGUESA
Associação Industrial Portuguesa

— LA HOUILLE BLANCHE

— METALLURGIA AND METAL FORMING
National Association of Drop Forgers and Stampers

— MACHINE TOOL REVIEW

— MARCONI INSTRUMENTATION
Marconi Instruments Limited

— ONU (CHRONIQUE MENSUELLE)
Service de L'Information de L'Organisation des Nations Unies

— O PROPULSOR
Sindicato Nacional dos Oficiais Maquinistas da Marinha Mercante

— PROCEEDINGS
Mowinmlijme Nederlandse Amademie Van Wetenschappen

— PLÁSTICOS
Grémio Nacional dos Industriais de Composição e Transformação de Matérias Plásticas

— RAIL INTERNATIONAL
Association Internationale du Congrés des Chemins de fer et de L'Union International des Chemins de fer

— REVUE D'IENI

— REVISTA DE OBRAS PUBLICAS

— REVUE LANDIS E GYR
Candis e Gyr sa, Service Publicité et Promotion

— REM
Revista da Escola de Minas

— LA RECHERCHE AÉROSPATIALE
Office National D'Etudes et de Recherches Aérospatiale

— REVISTA DE METALURGIA
CENIN — Centro Industrial de Investigação Metalúrgicas

— REVISTA DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA
Universidade de Lisboa

— STET
S. A. R. L.

## PUBLICAÇÕES NÃO PERIÓDICAS

— PLEUROLICINE RODENTS (GEOMYOIDEA) OF THE JOHN DAY FORMATION, OREGON AND THEIR RELATIONSHIPS TO TAXA FROM THE EARLY AND MIDDLE MIOCENE, SOUTH DAMOTA
University of California

— EARLY PLIOCENE MARINE CLIMATE AND ENVIRONMENT OF THE EASTERN VENTURA BASIN, SOUTHERN CALIFORNIA
University of California

— A DELPHINID MAMMALIA, CETACEA FROM THE MIOCENE OF PALOS VERDES HILLS, CALIFORNIA
University of California

— CHIROPTERA AND DERMOPTERA OF THE FRENCH EARLY EOCENE
University of California

— OLIGOCENE BIOSTRATIGRAPHY SAN JOAQUIN VALLEY, CALIFORNIA
University of California

— MEANS OF CONTROLLING LITTORAL DRIFT TO PROTECT BEACHES, DUNES, ESTUARIES AND HARBOUR ENTRANCES
ESTABLISHMENT OF ARTIFICIAL BEACHES
Laboratório Nacional de Engenharia Civil

— A HIDRÁULICA DOS ESCOAMENTOS COM FUNDO MÓVEL, NATUREZA, EVOLUÇÃO E PROSPECTIVA DE ALGUNS PROBLEMAS
Laboratório Nacional de Engenharia Civil

— SITUAÇÃO ECONÓMICA E FINANCEIRA DE ANGOLA
Banco de Angola — Relatório e Contas 1973

— CONTRIBUIÇÃO PARA O ESTUDO ESTRUTURAL DE UMA CENTRAL HIDROELÉCTRICA ASSENTE SOBRE FUNDAÇÃO DEFORMÁVEL
Laboratório Nacional de Engenharia Civil

— BEHAVIOUR OF A LARGE DAM BUILT ON A VERY DEFORMABLE FOUNDATION
Laboratório Nacional de Engenharia Civil

— THE INFLUENCE OF WATER TEMPERATURE ON THE ROUGHNESS OF ALLUVIAL FLOWS
Laboratório Nacional de Engenharia Civil

— ALUMÍNIO ANODIZADO PARA A CONSTRUÇÃO CIVIL
Laboratório Nacional de Engenharia Civil

— ETUDE EXPERIMENTALE DES ÉJECTEURS CONVERGENTS TRONCONIQUES
Office National D'Estudes et Recherches Aérospatiales

— PROPAGATION D'ONDES ACOUSTIQUES DANS UN CONDUIT EN PRÉSENCE D'ÉCOULEMENT
Office National D'Estudes et Recherches Aérospatiales

— UN NOUVEAU DISPOTITIF D'EXCITATION VIBRATOIRE DE STRUCTURES MÉCANIQUES
Office National D'Estudes et de Recherches Aérospatiales

— INFLUENCE DES CONDITIONS D'ENVIRONNMENT SUR UN RÉSONATEUR A QUARTZ
Office National D'Estudes et Recherches Aérospatiales

— SYNCHRONISATION D'OSCILLATEURS ULTRA-STABLES AU MOYEN D'UN FAISCEAU LASER
Office National D'Estudes et de Recherches Aérospatiales

BIBLIOTECA DO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
LISBOA
OFERTA

VICENTE FERREIRA E BRAZÃO FARINHA

# TABELAS TÉCNICAS

técnica
REVISTA DE ENGENHARIA DA ASSOCIAÇÃO DOS ESTUDANTES DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO - LISBOA

**7ª EDIÇÃO REVISTA E ACTUALIZADA**
**PREÇO 250.00**
**DESC. 10% AOS ASSINANTES**

# Publicidade com critério.

# Anuncie na

técnica REVISTA DE ENGENHARIA